COMPTE RENDU
DES SÉANCES
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 13 FÉVRIER 1860.

PRÉSIDENCE DE M. CHASLES.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

PHYSIQUE VÉGÉTALE. — *Quatrième Mémoire sur la physique des végétaux ; par* M. **Becquerel**. (Extrait.)

« J'ai démontré dans mes précédents Mémoires que la température des végétaux tendait sans cesse à se mettre en équilibre avec celle de l'air, et participait aux variations diurnes en raison de leur diamètre. J'ai fait voir, en outre, que lorsque la température de l'air s'abaissait au-dessous de zéro, les troncs d'arbres résistaient pendant un certain temps, également suivant leur grosseur, au refroidissement, puis à l'échauffement qui le suit, quand le dégel commençait au dehors ; de là on pouvait inférer qu'il existait dans les tissus des végétaux une ou plusieurs causes indépendantes de la conductibilité qui luttait sans cesse contre leur refroidissement, et les préservait pendant un certain temps des effets de la gelée. Cette constatation faite, il s'agissait de savoir d'où provenait cette chaleur inhérente aux végétaux, laquelle retardait leur refroidissement.

» Les observations faites par MM. Bravais à Bossekop, et Thomas à Kaafiord, dans l'hiver de 1839 et 1840, sur la température des pins (*Voyages en Scandinavie, en Laponie, etc.; Géographie botanique,* t. XI, 1re partie, p. 117), ont mis en évidence des résultats importants qui se rattachent à la question.

» Un thermomètre à mercure avait été fixé dans le tronc d'un pin syl-

vestre de $0^m,6$ de diamètre, et le tronc dans lequel il avait été introduit rempli de suif fondu.

» M. Bravais reconnut que les températures de l'arbre suivaient la courbe des températures de l'air avec un retard de huit à douze heures. Ce fait rentre dans les principes que j'ai établis. Le minimum observé dans l'arbre était de $22°,7$; celui qui correspondait dans l'air, de $23°,5$; différence en faveur de l'arbre, $0°,8$.

» Les pins avaient donc une température supérieure à celle de l'air d'un peu moins 1 degré.

» M. Thomas, qui avait observé simultanément la température d'un pin plein de vie et celle d'un pin mort, placés l'un à côté de l'autre et de même diamètre, trouva que dans le cours des mois d'octobre, novembre et décembre 1839, le thermomètre était descendu à $-8°,2$ et $-15°$, s'était élevé à $6°,6$ et 9 degrés, et que la courbe des températures des arbres vivant et mort suivait exactement celle de l'air. La moyenne dans l'arbre vivant a été constamment supérieure à celle de l'arbre mort. Les différences mensuelles ont été :

En octobre de..........................	$0°,63$
En novembre de........................	$0°,41$
En décembre de........................	$0°,17$

» La différence diminuait au fur et à mesure que le froid augmentait; il existait donc dans le pin vivant des causes qui s'opposaient à son refroidissement. On peut en admettre deux, en général : les réactions chimiques dans les tissus des végétaux, lesquelles produisent de la chaleur; la deuxième, la température des liquides aspirés par les racines, qui est plus élevée en hiver que celle de l'air, et plus basse en été; d'où résultent des effets contraires sur les végétaux dans les deux saisons, en supposant, comme tout porte à le croire, qu'elle exerce une influence sur leur température.

» Il n'est pas possible, dans l'état actuel de nos connaissances, d'apprécier l'influence que peut avoir la première cause. Quant à la seconde, il n'en est pas de même : j'ai commencé par déterminer la température des parties du sol où se trouvent les racines des arbres de première grandeur, question qui peut être résolue aujourd'hui complétement avec le thermomètre électrique, sans avoir recours à des corrections, comme on y est obligé avec les observations faites avec les thermomètres ordinaires.

» Depuis plus d'un siècle, on observe en Europe, sur différents points, la température à diverses profondeurs au-dessous du sol, pour connaître le mouvement de la chaleur dans les parties qui sont le plus influencées par l'action solaire, et où se trouvent par conséquent les racines des végétaux,

qui leur enlèvent des liquides ayant leur température, liquides qui doivent constituer plus tard la séve.

» J'ai passé successivement en revue les observations faites à diverses profondeurs au-dessous du sol, à Zurich, par Ott, en 1762; à Genève, de 1796 à 1800, par Pictet et Maurice; à Leith, près d'Édimbourg, en 1816 et 1817; à Bruxelles, par M. Quételet, de 1836 à 1842: ces dernières, ayant été corrigées des effets résultant de la différence de température entre le réservoir et le thermomètre, inspirent plus de confiance que les autres; elles montrent que pendant six mois de l'année, d'avril en septembre, c'est-à-dire pendant le printemps et l'été, la température moyenne de l'air a été supérieure de 2°,27 à celle de la partie du sol où se trouvent les racines, et inférieure au contraire en moyenne de 1°,50 d'octobre en mars.

» Sous le climat de Paris, les observations manquent pour faire une supputation semblable. Celles qui ont été faites il y a une trentaine d'années à l'Observatoire, n'ayant pas subi les corrections dépendantes du rapport des volumes de liquide que renferment la boule et la tige de chaque thermomètre n'ont pas été publiées. M. Poisson, qui en fait mention dans sa théorie mathématique de la chaleur, s'en est servi seulement pour comparer les époques calculées des maxima et des minima de température à $6^m,49$ et $8^m,121$ de profondeur aux époques observées.

» Depuis le 1er janvier dernier, j'ai commencé à observer régulièrement avec le thermomètre électrique les températures à $1^m,26$ et à 3 mètres au-dessous du sol, avec une précision qui ne laisse, je crois, que peu de chose à désirer, et cela dans le but de comparer la température des arbres avec celles de l'air et des parties du sol où se trouvent les racines. Voici les résultats que j'ai obtenus :

Température moyenne en janvier	à 3 mètres au-dessous du sol	11°,30
Id.	à $1^m,26$	7°,60
Id.	de l'air	4°,48
Différence entre les températures à $1^m,26$ et dans l'air	....	3°,12

» Quoique la température n'ait pas été observée régulièrement en décembre à $1^m,26$, alors que la température moyenne de l'air était de 3°,26, on est porté à croire, d'après seulement quelques observations, que pendant ce mois la différence entre la température du sol à cette profondeur et celle de l'air a été d'environ 4°,35.

» Il est donc bien prouvé que sous le climat de Paris comme sous celui de Belgique, la température des couches du sol où se trouvent les racines

des arbres de première grandeur est supérieure en décembre et janvier de 3 degrés environ à celle de l'air. Comment cette température peut-elle exercer une influence sur celle des arbres? On ne saurait admettre un mouvement ascensionnel du liquide absorbé par les racines, attendu que les branches étant privées de leurs feuilles, et l'évaporation par suite étant nulle, l'absorption par les racines doit être très-ralentie si elle n'est pas nulle, du moins dans le marronnier d'Inde, sujet de mes observations. Ne pourrait-il pas se faire, mais ce n'est là qu'une simple supposition, que la séve qui gorge les vaisseaux, étant refroidie quand la température de l'air est à zéro et au-dessous, soit déplacée en vertu d'une action d'endosmose par les liquides qui se trouvent dans les racines, et dont la densité est moindre.

» Il n'en est plus de même en été où le mouvement ascensionnel de la séve apporte dans les tissus un liquide ayant une température moins élevée de quelques degrés que celle de l'air et qui tempère ainsi l'échauffement du végétal sous l'influence du milieu ambiant.

» En résumé, les observations recueillies jusqu'ici sur la température des végétaux conduisent aux conséquences suivantes :

» 1°. La température moyenne annuelle des végétaux est la même que celle de l'air; les deux courbes de température ont les mêmes allures, quoique ne coïncidant pas ensemble, attendu que les végétaux ne participent aux variations diurnes de la température de l'air qu'en raison de leur diamètre. L'air est donc la source principale de la chaleur végétale.

» 2°. Le maximum de température dans l'air a lieu en hiver vers 2 heures du soir et en été vers 3 heures ; dans les végétaux, ces heures sont retardées suivant leur grosseur ; dans des arbres de $0^m,3$ ou $0^m,4$ de diamètre, le maximum se montre en hiver vers 9 heures du soir, et en été vers minuit.

» 3°. Lorsque la température s'abaisse dans l'air au-dessous de zéro, les végétaux résistent plus ou moins de temps au refroidissement, ainsi qu'à l'échauffement qui suit le dégel, sans que l'on puisse attribuer cet effet à la mauvaise conductibilité du bois.

» Lorsque le froid dure pendant plusieurs mois, comme dans le nord de l'Europe, la température s'abaisse successivement dans l'arbre, mais jamais autant que dans l'air : il y a une différence de $\frac{1}{2}$ degré à 1 degré en faveur de l'arbre.

» 4°. La température des végétaux, qui est presque toute d'emprunt, paraît néanmoins être influencée par la chaleur dégagée dans les réactions chimiques qui ont lieu dans les tissus, et par la température des parties du sol où les racines puisent les liquides qui doivent constituer plus tard la séve,

sans que l'on sache encore comment en hiver, lorsque le mouvement ascensionnel de la séve est presque suspendu, la température des parties inférieures du sol puisse intervenir pour diminuer le refroidissement, quand la température extérieure est au-dessous de zéro.

» Telles sont les conséquences que j'ai déduites des observations faites jusqu'ici sur la température des végétaux, conséquences qui mettent en évidence les causes principales auxquelles il faut rapporter leur état calorifique. »

MÉCANIQUE. — *Observations sur les formules de Lagrange relatives au mouvement du boulet dans l'intérieur du canon; par* **M. Piobert**. [Fin (*).]

« Le travail développé dans la détente des gaz s'obtient comme dans les cas précédents de $n=1$ (**22** et **34**); mais ici la longueur variable de la partie de la charge qui se détend est α_1, et la longueur θ occupée dans l'âme par les gaz dilatés, est $y-\alpha+\alpha_1$; on a donc pour l'expression de cette quantité de travail

$$\pi c^2 k\mathrm{D}\int_0^{\alpha_1}\frac{dy+d\alpha_1}{y-\alpha+\alpha_1}.$$

La relation trouvée précédemment, $y-\alpha+\alpha_1=\frac{3mr_1\alpha+3\mu\alpha_1}{3mr_1\alpha+2\mu\alpha_1}\alpha_1$, permet d'éliminer y et dy; mettant pour r_1 sa valeur

$$2+\left(0,1665-0,026\frac{\mu}{m}\right)\frac{\mu\alpha_1}{m\alpha},$$

ou plus simplement sa moyenne qui est la valeur de r correspondant à $\frac{\mu}{2m}$, on peut intégrer; de sorte que l'équation du mouvement est, dans les premiers instants,

$$\left(m+\frac{5mr_1+2\mu_1}{15mr_1+10\mu_1}\right)v^2=2\pi c^2 k\mathrm{D}\left[\alpha_1-\frac{mr_1\alpha}{\mu}\,l'\left(\frac{mr_1\alpha+\mu\alpha_1}{mr_1\alpha}\right)+\frac{3mr_1\alpha}{2\mu}\,l'\left(\frac{3mr_1\alpha+2\mu\alpha_1}{3mr_1\alpha}\right)\right];$$

quand μ_1 devient égal à μ, et α_1 à α, ou quand toutes les tranches de gaz se mettent en mouvement, époque à laquelle $\frac{\theta}{\alpha}=\frac{3mr+3\mu}{3mr+2\mu}$, on a

$$\left(m+\frac{5mr+2\mu}{15mr+10\mu}\right)v^2=2\pi c^2 k\mathrm{D}\alpha\left[1-\frac{mr_1}{\mu}\,l'\left(\frac{mr_1+\mu}{mr_1}\right)+\frac{3mr_1}{2\mu}\,l'\left(\frac{3mr_1+2\mu}{3mr_1}\right)\right].$$

(*) Suite de la page 262 de ce volume.

» *Solutions très-approchées en modifiant la méthode de Lagrange.* — A l'inspection du tableau qui précède, on voit que la formule (8) est moins exacte que les autres; mais il est possible d'obtenir par la méthode qui y a conduit des solutions plus approchées. On a déjà fait remarquer que, pour arriver à cette expression de z, on a supposé que la nouvelle inconnue u était très-petite et ne variait pas avec le temps, tandis qu'au contraire celle qu'on obtient, contient le facteur $\frac{y-y'}{\alpha}$ qui varie beaucoup; car sa valeur, qui à l'origine est égale à l'unité, augmente rapidement et s'élève jusqu'à 15 et 20, et même jusqu'à 60 dans les armes à feu portatives; quant à la grandeur de u, elle n'est jamais, il est vrai, qu'une faible partie de z, mais pas aussi petite qu'il le faudrait pour arriver à une grande approximation; dans le cas ordinaire de $n = 2$, $m = 3$ et m' très-grand, on a

$$\frac{u}{z} = \frac{x^2 - \alpha^2}{x^2 + 35\alpha^2};$$

pour la valeur moyenne de x ou pour $x = \frac{\alpha}{2}$, ce rapport devient

$$\frac{u}{z} = -\frac{3}{141} = -\frac{1}{47},$$

et pour $x = 0$, on a

$$\frac{u}{z} = \frac{1}{35};$$

la solution n'est donc que médiocrement approchée. Mais en partant de la valeur de z qu'elle donne

$$z = y' + \frac{y-y'}{\alpha}x + \frac{\mu(y-y')x(x-\alpha)}{6n\alpha^3}\left(\frac{x+\alpha}{m} + \frac{x-2\alpha}{m'}\right),$$

mise sous la forme

$$z = y' + \frac{y-y'}{\alpha}x + \frac{y-y'}{\alpha}u,$$

on peut la compléter en y ajoutant une nouvelle inconnue u', qui sera alors effectivement une quantité très-petite en $\frac{\mu^2}{m^2}$ et en $\frac{\mu^2}{m'^2}$, et dont les différentielles partielles n'entreront dans les termes du second membre de l'équation (7) que multipliées par les puissances supérieures de ces rapports,

toujours assez petits. Faisant donc

$$z = y' + \frac{y-y'}{\alpha}x + \frac{y-y'}{\alpha}\frac{\mu x(x-\alpha)}{6n\alpha^2}\left(\frac{x+\alpha}{m} + \frac{x-2\alpha}{m'}\right) + u',$$

on aura en différentiant

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y-y'}{\alpha}\left(1+\frac{du}{dx}\right) + \frac{du'}{dx}$$

$$= \frac{y-y'}{\alpha}\left[1 + \frac{\mu(3x^2-\alpha^2)}{6nm\alpha^2} + \frac{\mu(3x^2-6\alpha x+2\alpha^2)}{6nm'\alpha^2}\right] + \frac{du'}{dx},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{y-y'}{\alpha}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u'}{dx^2} = \frac{y-y'}{\alpha}\frac{\mu}{n\alpha^2}\left(\frac{x}{m} - \frac{x-\alpha}{m'}\right) + \frac{d^2u'}{dx^2}$$

et

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2y'}{dt^2}\right)\left[\frac{x}{\alpha} + \frac{\mu x(x-\alpha)}{6n\alpha^3}\left(\frac{x+\alpha}{m} + \frac{x-2\alpha}{m'}\right)\right] + \frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{d^2u'}{dt^2};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (7) et dans les équations (2), il vient, en négligeant les différentielles de u' dans les seconds membres,

$$\frac{y-y'}{\alpha}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u'}{dx^2} = \frac{D}{nk}\left(\frac{y-y'}{\alpha}\right)^{n+1}\left(1 + \mu\frac{3x^2-\alpha^2}{6nm\alpha^2} + \mu\frac{3x^2-6\alpha x+2\alpha^2}{6nm'\alpha^2}\right)^{n+1}$$

$$\times\left\{\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2y'}{dt^2}\right)\left[\frac{x}{\alpha} + \frac{\mu x(x-\alpha)}{6n\alpha^3}\left(\frac{x+\alpha}{m} + \frac{x-2\alpha}{m'}\right)\right] + \frac{d^2y'}{dt^2}\right\},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\pi c^2 k}{m}\left(\frac{y-y'}{\alpha}\right)^{-n}\left(1 + \frac{\mu}{3nm} - \frac{\mu}{6nm'}\right)^{-n} = \frac{\pi c^2 k}{m}\left(\frac{y-y'}{\alpha}\right)^{-n}P^{-n},$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = -\frac{\pi c^2 k}{m'}\left(\frac{y-y'}{\alpha}\right)^{-n}\left(1 - \frac{\mu}{6nm} + \frac{\mu}{3nm'}\right)^{-n} = -\frac{\pi c^2 k}{m'}\left(\frac{y-y'}{\alpha}\right)^{-n}Q^{-n}.$$

Par la substitution de ces deux dernières valeurs dans l'équation qui précède, on obtient

$$\frac{y-y'}{\alpha}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u'}{dx^2} = \frac{\mu}{n\alpha}\frac{y-y'}{\alpha}\left(1 + \mu\frac{3x^2-\alpha^2}{6nm\alpha^2} + \mu\frac{3x^2-6\alpha x+2\alpha^2}{6nm'\alpha^2}\right)^{n+1}$$

$$\times\left\{\left(\frac{P^{-n}}{m} + \frac{Q^{-n}}{m'}\right)\left[\frac{x}{\alpha} + \frac{\mu x(x-\alpha)}{6n\alpha^3}\left(\frac{x+\alpha}{m} + \frac{x-2\alpha}{m'}\right)\right] - \frac{Q^{-n}}{m'}\right\}.$$

Développant la puissance $n+1$ du premier polynôme, et effectuant la multiplication de ses trois premiers termes par ceux du dernier polynôme, en négligeant les puissances supérieures à la seconde des rapports des

poids de la charge et des mobiles, on a

$$\frac{y-y'}{\alpha}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u'}{dx^2}=\frac{y-y'}{\alpha}\frac{\mu}{n\alpha}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{\alpha}+\mu\dfrac{(3n+4)x^3-(n+2)\alpha^2x}{6nm\alpha^3}\\ \qquad+\mu\dfrac{(3n+4)x^3-(6n+9)\alpha x^2+(2n+4)\alpha^2x}{6nm'\alpha^3}\end{array}\right]\left(\dfrac{\mathrm{P}^{-n}}{m}+\dfrac{\mathrm{Q}^{-n}}{m'}\right)\\ -\dfrac{\mathrm{Q}^{-n}}{m'}\left(1+\mu\dfrac{3x^2-\alpha^2}{6nm\alpha^2}+\mu\dfrac{3x^2-6\alpha x+2\alpha^2}{6nm'\alpha^2}\right)\end{array}\right\};$$

intégrant deux fois, il vient

$$\frac{y-y'}{\alpha}\frac{du}{dx}+\frac{du'}{dx}=\frac{y-y'}{\alpha}\frac{\mu}{n\alpha}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{2\alpha}+\mu\dfrac{(3n+4)x^4-2(n+2)\alpha^2x^2}{24nm\alpha^3}\\ \qquad+\mu\dfrac{3(3n+4)x^4-4(6n+9)\alpha x^3+6(2n+4)\alpha^2x^2}{72nm'\alpha^3}\end{array}\right]\left(\dfrac{\mathrm{P}^{-n}}{m}+\dfrac{\mathrm{Q}^{-n}}{m'}\right)\\ -\dfrac{\mathrm{Q}^{-n}}{m'}\left(x+\mu\dfrac{x^3-\alpha^2x}{6nm\alpha^2}+\mu\dfrac{x^3-3\alpha x^2+2\alpha^2x}{6nm'\alpha^2}\right)\end{array}\right\}+\mathrm{C},$$

$$\frac{y-y'}{\alpha}u+u'=\frac{y-y'}{\alpha}\frac{\mu}{n\alpha}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^3}{6\alpha}+\mu\dfrac{3(3n+4)x^5-10(n+2)\alpha^2x^3}{360nm\alpha^3}\\ \qquad+\mu\dfrac{3(3n+4)x^5-5(6n+9)\alpha x^4+10(2n+4)\alpha^2x^3}{360nm\alpha^3}\end{array}\right]\left(\dfrac{\mathrm{P}^{-n}}{m}+\dfrac{\mathrm{Q}^{-n}}{m'}\right)\\ -\dfrac{\mathrm{Q}^{-n}}{m'}\left(\dfrac{x^2}{2}+\mu\dfrac{x^4-2\alpha^2x^2}{24nm\alpha^2}+\mu\dfrac{x^4-4\alpha x^3+4\alpha^2x^2}{24nm'\alpha^2}\right)\end{array}\right\}+\mathrm{C}x+\mathrm{C}'.$$

Déterminant les constantes C et C′ par la condition de rendre nul $\frac{y-y'}{\alpha}u+\mu'$ pour $x=0$ et pour $x=\alpha$, on a

$$z=y'+\frac{y-y'}{\alpha}x+\frac{y-y'}{\alpha}\frac{\mu}{n\alpha}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^3-\alpha^2x}{6\alpha}+\mu\dfrac{3(3n+4)x^5-10(n+2)\alpha^2x^3+(n+8)\alpha^4x}{360nm\alpha^3}\\ \qquad+\mu\dfrac{3(3n+4)x^5-5(6n+9)\alpha x^4+10(2n+4)\alpha^2x^3+(n-7)\alpha^4x}{360nm'\alpha^3}\end{array}\right]\left(\dfrac{\mathrm{P}^{-n}}{m}+\dfrac{\mathrm{Q}^{-n}}{m}\right)\\ -\dfrac{\mathrm{Q}^{-n}}{m'}\left(\dfrac{x^2-\alpha x}{2}+\mu\dfrac{x^4-2\alpha^2x^2+\alpha^4}{24nm\alpha^2}+\mu\dfrac{x^4-4\alpha x^3+4\alpha^2x^2-\alpha^3x}{24nm'\alpha^2}\right)\end{array}\right\}.$$

» Telle est la valeur de z contenant la deuxième puissance des rapports des poids de la charge et des mobiles, et qui est sensiblement plus approchée que celle de Lagrange; pour juger de son exactitude en la comparant aux cas déjà calculés et connus exactement, on fera $n=2$, $m=3\mu$, et on ne considérera que la partie de la charge qui se meut avec le projectile; il vient alors

$$(13)\qquad z=y'+\frac{y-y'}{\alpha}x+\frac{y-y'}{\alpha}\left(\frac{18}{19}\right)^2\frac{1}{36}\,\frac{3x^5+32\alpha^2x^3-35\alpha^4x}{36\alpha^4}$$

$$=y'+\frac{y-y'}{\alpha}x+\frac{y-y'}{\alpha}\,\frac{1}{361}\,\frac{3x^5+32\alpha^2x^3-35\alpha^4x}{4\alpha^4};$$

d'où

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y-y'}{\alpha}\left(1 + \frac{15x^4 + 96\alpha^2x^2 - 35\alpha^4}{1444\alpha^4}\right).$$

» Les densités des tranches de gaz qu'on déduit de cette expression, diffèrent des densités exactes quatre fois moins, en moyenne, que celles qu'on obtient de la formule (8), qui ne contient que la première puissance du rapport du poids de la charge à celui du projectile. En prenant un terme de plus du développement du polynôme élevé à la puissance $n+1$, terme qui contient le cube du même rapport, mais qui n'est pas complet, parce qu'on a négligé de petites quantités ou des différentielles qui devraient y entrer, on n'obtient que des densités très-peu plus approchées ; on a alors

$$(14) \qquad z = y' + \frac{y-y'}{\alpha}x + \frac{y-y'}{\alpha}\,\frac{1}{361}\,\frac{12x^7 + 231\alpha^2x^5 + 270\alpha^4x^3 - 2945\alpha^6x}{336\alpha^6},$$

et

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y-y'}{\alpha}\left(1 + \frac{84x^6 + 1155\alpha^2x^4 + 8106\alpha^4x^2 - 2945\alpha^6}{121296\alpha^6}\right).$$

» Pour avoir une valeur de z plus approchée, il faut procéder de nouveau et de la même manière que ci-dessus, en faisant alors pour le même cas de $n=2$, $m=3\mu$ et $m'=\infty$ qui nous occupe,

$$u = \frac{3x^5 + 32\alpha^2x^3 - 35\alpha^4x}{1444\alpha^4};$$

il vient alors, après les différentiations de la valeur de z et les substitutions dans les équations (2) et (7),

$$\frac{y-y'}{\alpha}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u'}{dx^2} = \frac{1}{2\alpha}\,\frac{y-y'}{\alpha}\left(1 + \frac{15x^4 + 96\alpha^2x^2 - 35\alpha^4}{1444\alpha^4}\right)^3\left(1 + \frac{1}{19}\right)^{-2}\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{3x^5 + 32\alpha^2x^3 - 35\alpha^4x}{1444\alpha^5}\right).$$

Développant la troisième puissance du polynôme, et effectuant la multiplication des premiers termes par le dernier facteur, on a

$$\frac{y-y'}{\alpha}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u'}{dx^2} = \frac{1}{2\alpha}\,\frac{y-y'}{\alpha}\left(\frac{400}{361}\right)^{-1}\frac{135x^9 + 230\alpha^2x^7 + 7663\alpha^4x^5 + 44864x^6x^3\ 188665\alpha^8x}{(1444)^2\alpha^9};$$

intégrant deux fois et déterminant les constantes comme ci-dessus, il vient

$$(15) \qquad z = y' + \frac{y-y'}{\alpha}x + \frac{y-y'}{\alpha}\,\frac{\frac{27}{22}x^{11} + 32\alpha^2x^9 + \frac{12773}{7}\alpha^4x^7 + 22432\alpha^6x^5 + 943325{,}5\alpha^8x^3 - 338731{,}5748\alpha^{10}x}{4.4.6.1444\alpha^{10}},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dz}{dx}=\frac{y-y'}{\alpha}\left(1+\frac{13,5x^{10}+288\alpha^2x^8+12773\alpha^4x^6+112160\alpha^6x^4+94332,5\alpha^8x^2-338731,5748\alpha^{10}}{13862400\alpha^{10}}\right),$$

formule qui donne des densités beaucoup plus approchées que les formules précédentes, les erreurs étant en moyenne quatre fois plus petites. Par les mêmes raisons que pour les formules (15 et 16), on peut ne pas tenir compte des puissances et des produits des termes incomplets par suite des petites quantités qu'on a négligées; aussi, en ne prenant pas les produits des termes fractionnaires entre eux, d'ailleurs très-petits, on simplifie beaucoup les calculs, et on a une approximation presque aussi grande; il vient alors

$$(16)\qquad z=y'+\frac{y-y'}{\alpha}x+\frac{y-y'}{\alpha}\,\frac{24x^7+336\alpha^2x^5+4564\alpha^4x^3-4924\alpha^6x}{4.6.21.400\alpha^6},$$

et

$$\frac{dz}{dx}=\frac{y-y'}{\alpha}\left(1+\frac{42x^6+420\alpha^2x^4+3423\alpha^4x^2-1231\alpha^6}{50400}\right).$$

» On a formé un tableau des densités des tranches de gaz données par les diverses formules précédentes et des corrections qui les rendent exactes.

Position de la tranche.	PREMIÈRE APPROXIMATION.				SECONDE APPROXIMATION.			
	Formule (13).		Formule (14).		Formule (15).		Formule (16).	
Valeur de $\frac{x}{\alpha}$	Valeur de φ.	Correction.	Valeur de φ.	Correction.	Valeur de φ.	Correction.	Valeur de φ.	Correction.
Tranche immobile.	1,024840	+223	1,024892	+171	1,025047	+ 16	1,025036	+ 27
0,1	1,024141	+206	1,024181	+166	1,024331	+ 16	1,024320	+ 27
0,2	1,022038	+144	1,022073	+109	1,022181	+ 1	1,022175	+ 7
0,3	1,018507	+ 89	1,018524	+ 72	1,018584	+ 12	1,018583	+ 13
0,4	1,013515	+ 19	1,013520	+ 14	1,013516	+ 18	1,013522	+ 12
0,5	1,007017	− 54	1,007015	− 52	1,006948	+ 15	1,006961	+ 2
0,6	0,998960	−102	0,998956	− 98	0,998847	+ 11	0,998850	+ 8
0,7	0,989277	−107	0,989283	−113	0,989157	+ 13	0,989166	+ 4
0,8	0,977933	− 98	0,977926	− 91	0,977827	+ 8	0,977826	+ 9
0,9	0,964845	+ 28	0,964816	+ 57	0,964793	+ 80	0,964787	+ 86
Contre le projectile.	0,950000	−126	0,949881	− 7	0,949976	−102	0,949986	−112
Moyenne des erreurs.		109		86		26,5		28

» *Solution exacte dans le cas général ramené par Lagrange aux quadratures.* — Lagrange, dans un paragraphe [6], ayant pour titre dans son ma-

nuscrit : *Analyse d'un cas très-général qui comprend la formule* (8), a reconnu qu'on peut satisfaire en même temps aux équations du mouvement des gaz et des mobiles par certaines valeurs de z, y, y', qui ne dépendent que des quadratures; pour y parvenir, il désigne par X une fonction inconnue de x, telle qu'on puisse avoir exactement $z = y' + \frac{y - y'}{\alpha} X$, et par β' et β les valeurs de $\frac{dX}{dx}$ qui correspondent à $x = 0$ et à $x = \alpha$; la condition de satisfaire à la fois aux trois équations du mouvement, le conduit à une équation qui ne renferme plus d'autres variables que X et x, ce qui prouve la possibilité de la forme de z qu'il a supposée, et qui donne, après une première intégration, l'équation

$$(10) \qquad \frac{1}{m\beta^n} X^2 + \frac{1}{m'\beta'^n}(X^2 - 2\alpha X) = \frac{2n\alpha^2}{(1-n)\mu}\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{1-n} - \beta'^{1-n}\right].$$

Comme on doit avoir en même temps $x = \alpha$, $X = \alpha$ et $\frac{dX}{dx} = \beta$, on a

$$(11) \qquad \frac{1}{m\beta^n} - \frac{1}{m'\beta'^n} = \frac{2n}{(1-n)\mu}(\beta^{1-n} - \beta'^{1-n})$$

pour l'une des deux équations qui devront servir à déterminer β et β'; mais la deuxième condition qui est nécessaire, dépend de l'intégration de l'équation (10), qu'on ne peut attaquer que par la méthode des quadratures, et qui donnerait lieu ici à des calculs impraticables qu'il ne serait pas raisonnable d'entreprendre. Toutefois il est à remarquer que si par les considérations qui ont été développées (**19**) on sépare la charge μ en deux parties, μ' et μ'', qui agissent séparément, l'une sur le projectile, l'autre sur la bouche à feu, l'équation (10) se simplifie beaucoup, car elle se réduit à

$$dx = \left[\beta'^{1-n} + \frac{(1-n)\mu}{2nm\alpha^2\beta^n} X^2\right]^{\frac{1}{n-1}} dX,$$

dont le deuxième membre est développable en série assez peu compliquée pour qu'on puisse effectuer l'intégration. D'un autre côté, on a vu (**7** et **12**) que dans le cas des gaz de la poudre, on peut prendre $n = 2$; alors l'équation (10) s'intègre immédiatement et donne

$$x = \beta'^{-1} X - \frac{\mu}{12 m \alpha^2 \beta^2} X^3 - \frac{\mu}{4 m' \alpha^2 \beta'^2}\left(\frac{X^3}{3} - \alpha X^2\right),$$

la constante étant nulle, puisque X doit s'évanouir en même temps que x;

comme on a aussi $X = \alpha$ quand $x = \alpha$, il vient

$$1 = \mathcal{C}'^{-1} - \frac{\mu}{12m\mathcal{C}^2} + \frac{\mu}{6m'\mathcal{C}'^2};$$

l'équation (11) devient, quand $n = 2$,

$$\frac{1}{m\mathcal{C}^2} - \frac{1}{m'\mathcal{C}'^2} = \frac{4}{\mu}(\mathcal{C}'^{-1} - \mathcal{C}^{-1}).$$

Ces deux équations, retranchées l'une de l'autre, après avoir été multipliées, la première par $\mathcal{C}$ et la deuxième par μ, donnent

$$\mathcal{C}'^{-1} = \frac{12m - 8m\mathcal{C}^{-1} - \mu\mathcal{C}^{-2}}{4m};$$

cette valeur, substituée dans l'une des deux dernières équations, détermine $\mathcal{C}$; puis $\mathcal{C}'$ s'en déduit. Quand on considère séparément le mouvement de chaque portion de la charge se mouvant en sens contraire, les équations précédentes deviennent

$$1 = \mathcal{C}'^{-1} - \frac{\mu}{12m\mathcal{C}^2}, \quad \text{ou} \quad \mathcal{C}^2 - \mathcal{C}^2\mathcal{C}'^{-1} = \frac{\mu}{12m},$$

et

$$\frac{1}{m\mathcal{C}^2} = \frac{4}{\mu}(\mathcal{C}'^{-1} - \mathcal{C}^{-1}), \quad \text{ou} \quad \mathcal{C}^2\mathcal{C}'^{-1} - \mathcal{C} = \frac{\mu}{4m};$$

ajoutant ces deux équations membre à membre, on a

$$\mathcal{C}^2 - \mathcal{C} = \frac{\mu}{6m}$$

qui donne

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\mu}{6m}};$$

puis on a

$$\mathcal{C}' = \frac{4m\mathcal{C}^2}{4m\mathcal{C} + \mu} = \frac{6m + 2\mu + 12m\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\frac{\mu}{m}}}{6m + 3\mu + 12m\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\frac{\mu}{m}}}.$$

Ces valeurs de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$, substituées dans l'équation (10), déterminent complétement la relation qui existe entre X et x; , or dans le cas présent,

$n = 2$ et $m' = \infty$; cette relation devient donc

$$dx = \left(6'^{-1} - \frac{\mu}{4m\alpha^2 6^2} X^2\right) dX,$$

dont l'intégrale est

$$x = 6'^{-1} X - \frac{\mu}{12m\alpha^2 6^2} X^3, \quad \text{ou} \quad X^3 - \frac{12m\alpha^2 6^2}{\mu} 6'^{-1} X + \frac{12m\alpha^2 6^2}{\mu} x = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{X}{\alpha} = \frac{4 6\sqrt{m}}{\sqrt{\mu 6'}} - \cos\left(120^\circ - \frac{1}{3}\arccos - \frac{3 6'\sqrt{\mu 6'}}{4 6\sqrt{m}} \frac{x}{\alpha}\right).$$

La valeur de x en fonction de X est donnée très-simplement, ainsi que nous l'avons trouvé (**18**), (**25**), (**27**) et (**45**); tandis que la valeur de z ou celle de X dépend, même dans le cas le moins compliqué comme le précédent, pour lequel l'intégration s'effectue, de la résolution d'une équation du troisième degré qui tombe dans le cas irréductible, et ne peut s'exprimer que par des séries ou par des fonctions circulaires; c'est ce qui explique les difficultés qui ont arrêté Lagrange dans les solutions qu'il a tentées, et qui, toutes, exigeaient la connaissance de la valeur de z ou de celle de X en fonction de x. Dans les solutions auxquelles nous sommes arrivés (**21**), (**25**), (**33**) et (**40**), en partant de la densité des gaz, il suffit de connaître $\varphi = \left(\frac{dX}{dx}\right)^{-1}$ qui est donné immédiatement par l'équation (10), à l'aide d'une simple extraction de racine, même en considérant le mouvement simultané des deux mobiles. Si, comme application, on fait $m = 3\mu$ dans le cas de $n = 2$, cette équation (10) devient

$$\left(X^2 - \frac{12\alpha^2 6^2}{6'}\right)\frac{dX}{dx} + 12\alpha^2 6^2 = 0;$$

son intégrale est

$$X^3 - 36\alpha^2 6^2 6'^{-1} X + 36\alpha^2 6^2 x = 0,$$

et l'on a

$$\frac{X}{\alpha} = \frac{12 6}{\sqrt{3 6'}} - \cos\left(120^\circ - \frac{1}{3}\arccos - \frac{6'\sqrt{3 6'}}{4 6}\frac{x}{\alpha}\right),$$

relations qui donnent les expressions de x et de X au moyen des valeurs de 6 et de $6'$; celles-ci deviennent, quand $m = 3\mu$,

$$6 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{18}} = 1{,}0527707983925 \quad \text{et} \quad 6' = \frac{4m6^2}{\mu + 4m6} = 0{,}975549943;$$

ces valeurs, substituées dans les deux relations précédentes, donnent

$$X^3 - 40,89975002\,\alpha^2 X + 39,89974880\,\alpha^2 x = 0,$$

et

$$\frac{X}{\alpha} = 7,3846460 \cos\left(120^\circ - \frac{1}{3}\,\text{arc cos} - 0,3963104\,\frac{x}{\alpha}\right).$$

L'équation (10), donne, dans le même cas de $m = 3\mu$, $n = 2$ et $m' = \infty$,

$$\varphi = \left(\frac{dX}{dx}\right)^{-1} = \frac{1}{\beta'} - \frac{1}{12\,\alpha^2\beta'^2}\,X^2 = 1,02506275 - 0,07518844\,\frac{X^2}{\alpha^2}$$

pour le rapport de la densité de la tranche placée à la distance $\frac{X}{a}$ de la tranche immobile à la densité moyenne des tranches. A l'aide de ces deux relations, on peut déterminer les valeurs des différentes variables qui se correspondent entre elles; ainsi en faisant croître, soit X, soit x, de dixième en dixième, depuis o jusqu'à α, on calcule soit x, soit X, ainsi que les densités des tranches correspondant à ces différentes positions; on peut en former les deux tableaux suivants :

LONGUEUR OCCUPÉE PAR LES GAZ DIVISÉE PAR 10 TRANCHES ÉQUIDISTANTES.

Valeur de $\frac{X}{\alpha}$.	Valeur de $\frac{x}{\alpha}$.	Valeur de $\frac{x}{X}$.	Valeur de φ.
Tranche immobile.	0	1,0000000	1,0250627
0,1	0,10248130	1,0248130	1,0243108
0,2	0,28481216	1,0240608	1,0220552
0,3	0,30684267	1,0228089	1,0182958
0,4	0,40842178	1,0210544	1,0130326
0,5	0,50939880	1,0187976	1,0062657
0,6	0,60962243	1,0160278	0,9979950
0,7	0,70894772	1,0127810	0,9882205
0,8	0,80721754	1,0090219	0,9769422
0,9	0,90428589	1,0047621	0,9641601
Contre le projectile.	1,00000000	1,0000000	0,9498743

MASSE DES GAZ DIVISÉE EN 10 PARTIES ÉGALES.

Valeur de $\frac{x}{\alpha}$.	Valeur de $\frac{X}{\alpha}$.	Valeur de $\frac{X}{x}$.	Valeur de φ.
0	0	1,00000	1,0250627
0,1	0,09759	0,97590	1,0243465
0,2	0,19575	0,97875	1,0221817
0,3	0,29327	0,97757	1,0185960
0,4	0,39158	0,97895	1,0135336
0,5	0,49064	0,98128	1,0069628
0,6	0,59036	0,98393	0,9988577
0,7	0,69092	0,98703	0,9891700
0,8	0,79255	0,99032	0,9778354
0,9	0,89472	0,99413	0,9648726
1,0	1,00000	1,00000	0,9498743

Les densités des gaz données dans le premier tableau sont les mêmes que les densités exactes déjà trouvées (**37**); celles du deuxième tableau sont déduites de l'expression de $\left(\frac{dX}{dx}\right)^{-1}$, en prenant successivement les valeurs de $\frac{X}{\alpha}$ dans la seconde colonne; elles ont servi à évaluer les erreurs qu'on commet en employant les densités approchées, données précédemment par les formules (8), (12), (13), (14), (15) et (16).

RÉSUMÉ.

» Euler, après avoir reconnu toutes les difficultés que présente la question du mouvement des gaz de la poudre dans les bouches à feu, a renoncé à soumettre au calcul les diverses circonstances qui compliquent le phénomène, et s'est contenté de traiter le cas, très-hypothétique, dans lequel les gaz sont supposés « d'une si grande subtilité que la moindre force serait » capable de leur donner du mouvement, et que leur force élastique resterait » la même dans toutes les parties. » Lagrange ayant, au contraire, attaqué la question d'une manière générale, en considérant simultanément le mouvement des gaz et celui des mobiles, est parvenu à établir les équations différentielles de ces mouvements, et en a déduit deux équations qui expriment, l'une le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité du système, l'autre le principe des forces vives. Après avoir essayé de résoudre ces équations, il a tenté diverses solutions approchées en supposant la masse du fluide peu considérable par rapport à celle du projectile; mais aucune n'a répondu à l'hypothèse de laquelle il était parti, celle d'une densité uniforme des gaz dans toute l'étendue de l'espace qu'ils occupent à l'origine du mouvement; toutes, au contraire, expriment qu'à cette époque les gaz sont répartis dans l'âme suivant une certaine loi. Aussi l'illustre auteur avait abandonné son travail longtemps avant sa mort, comme ne satisfaisant pas complétement à toutes les conditions de la question. Poisson, en publiant ce travail en 1832, sous le titre de *Formules relatives au mouvement du boulet dans l'intérieur du canon, extraites des manuscrits de Lagrange*, a essayé de rectifier une de ces formules, en la rendant applicable au cas d'une densité uniforme des gaz au moment du déplacement du projectile, afin de satisfaire à l'état initial des gaz supposé dans la mise en équation du problème; mais, peu de temps après cette publication, il a reconnu s'être trompé dans cet essai de rectification.

» De si grands analystes n'ayant pas réussi dans leurs tentatives, pour arriver à une solution théorique de la question, nous avions dû renoncer, malgré quelques essais heureux, à poursuivre une marche qui présentait tant de difficultés, et dont les résultats ne paraissaient pas immédiatement applicables à la pratique de l'artillerie; nous avons donc dû reprendre des recherches antérieures qui avaient été entreprises pour satisfaire aux principaux besoins de cette pratique, en n'employant que la synthèse.

» Ces premières recherches avaient déjà servi de base, 1° à l'établissement de plusieurs nouvelles bouches à feu adoptées en 1828 et 1829, et

au calcul des épaisseurs de métal rigoureusement nécessaires pour résister aux efforts des gaz de la poudre dans les pièces en bronze et en fonte, qui, par suite de cette appréciation, purent, dans certains cas, être rendues deux fois plus légères que les anciennes; 2° à un nouveau mode de chargement des canons proposé en 1833 et adopté en France après des expériences prolongées et un tir de plus de 3670 coups par pièce, sans que ces pièces aient été hors de service; ce chargement rend la poudre moins offensive dans l'âme, tout en lui conservant les mêmes effets balistiques, résultats confirmés depuis en Russie en 1840, 1841 et 1844, aux États-Unis en 1844, et en Autriche dans ces dernières années. Aussi les mêmes canons de gros calibre ont pu rester d'un bon service à la guerre, pendant les années 1854 et 1855, malgré un tir continu qui a été en moyenne de plus de 2000 coups par pièce.

» Les premières recherches consistèrent d'abord dans l'étude raisonnée des cas les moins compliqués, en n'employant que les calculs les plus simples, tout en appliquant les principes généraux de la mécanique; puis, successivement, l'analyse ordinaire, pour traiter les questions moins restreintes; puis, enfin, le calcul infinitésimal, pour obtenir la solution complète de la question. Les différentes périodes de ces recherches ont été exposées dans ce Mémoire, dans l'ordre où les principaux résultats ont été obtenus, afin de faire mieux connaître la marche suivie pour atteindre le but définitif. Il en est peut-être résulté quelque longueur, et l'on aurait pu, sans doute, arriver plus promptement à la solution complète; mais on a cru préférable, suivant l'exemple laissé par les illustres géomètres qui se sont occupés de la même question, de ne pas laisser ignorer certains errements suivis quelquefois sans résultat immédiat. On a ainsi commencé par traiter le cas le plus simple, celui dans lequel la densité des gaz est supposée ne varier qu'avec le temps; puis on a été conduit par le raisonnement au cas où les densités des tranches successives décroissent, comme les ordonnées d'une parabole, à partir du sommet; et cette loi a été reconnue être assez approchée dans le plus grand nombre des cas de la pratique, et d'autant plus que la tension du fluide élastique se rapproche davantage d'être proportionnelle au carré de la densité. Mais ce qui a facilité singulièrement la solution de la question du mouvement des gaz de la poudre dans l'intérieur des bouches à feu, c'est la « possibilité qu'on a » trouvée de diviser cette question en deux problèmes distincts et moins » compliqués que l'ensemble du phénomène; car dans chacun d'eux une » extrémité de la charge peut être supposée appuyée contre un obstacle

» fixe, de sorte que tout le mouvement a lieu dans un même sens; et que
» l'on n'a plus qu'un mobile à considérer, et une seule vitesse à déterminer,
» la charge de poudre pouvant être partagée en deux portions, l'une qui
» se meut avec le projectile et l'autre avec le fond de l'âme de la pièce. »
Enfin, on a traité la question en déterminant les densités des gaz d'après les lois mêmes du mouvement, ce qui a conduit à la solution exacte dans le cas le plus général, et on est arrivé au principe suivant et à son corollaire :

« Pour satisfaire aux lois du mouvement des gaz dans un tube à section
» constante, le rapport de la tension à la densité doit décroître de tranche
» en tranche d'égale épaisseur, comme les ordonnées parallèles à l'axe
» diminuent dans une parabole ordinaire; le maximum de la tension et
» de la densité correspondent à une tranche immobile et au sommet de la
» parabole, dont le paramètre dépend de la masse de la charge, de celle
» du mobile poussé par les gaz et de la puissance de la densité proportion-
» nellement à laquelle la tension des gaz varie. Par suite, dans le cas par-
» ticulier de la tension des gaz proportionnelle au carré de la densité, le
» décroissement parabolique donne la loi exacte que suivent les densités
» des tranches. »

» Le travail de Lagrange était trop remarquable pour qu'on ne cherchât pas à le rattacher aux solutions du problème du mouvement des gaz de la poudre, auxquelles on était arrivé par une marche différente; c'est ainsi qu'on est parvenu à modifier son analyse de manière à obtenir, non-seulement les solutions qu'il avait tentées, mais encore des formules beaucoup plus approchées que les siennes; puis on a traité le cas général qu'il avait ramené aux quadratures, et on en a déduit des résultats identiquement les mêmes que ceux qui avaient été trouvés au moyen des solutions exactes données précédemment.

» La partie théorique de la question peut être considérée comme résolue, mais il reste encore à plier les formules aux cas de la pratique, de manière à leur faire représenter toutes les circonstances particulières du tir, qui compliquent le phénomène : comme la production successive des gaz, qui oblige de tenir compte du temps que la flamme emploie à se propager dans les diverses tranches de la charge, et de celui que les grains mettent à se comburer. De plus il existe toujours des pertes de gaz, qui ont lieu par la lumière du canon et par le vent du projectile; enfin les produits gazeux de la combustion de la poudre ont une tension qui ne varie pas proportionnellement à une puissance constante de la densité. Il est indispensable de tenir

un compte exact de toutes ces circonstances qui ont une certaine influence sur les résultats; ces différentes questions relatives aux applications feront l'objet d'un prochain Mémoire. »

ASTRONOMIE. — *Réponse à la Note de* M. Le Verrier *sur la* Connaissance des Temps *et l'*Annuaire du Bureau des Longitudes.; *par* M. **Mathieu**.

« Dans la dernière séance, M. Le Verrier a déposé sur le bureau une Note dans laquelle il appelle l'attention de l'Académie sur l'insuffisance et le défaut d'exactitude des deux ouvrages que le Bureau des Longitudes publie chaque année : l'*Annuaire* et la *Connaissance des Temps*. Il a cité comme exemple la planète Neptune, que la *Connaissance des Temps* passe sous silence, et pour laquelle l'*Annuaire*, suivant M. Le Verrier, donne une position erronée. Répondons d'abord à ce dernier reproche.

» L'*Annuaire* ne donne la position d'aucune planète; il renferme seulement le Tableau des éléments elliptiques des différentes planètes et les époques correspondantes aux longitudes moyennes de chacune d'elles. Pour les planètes principales, ce Tableau est reproduit chaque année, car leurs éléments sont connus assez exactement pour qu'il n'y ait pas lieu de les modifier souvent; or voici ce qui est arrivé pour Neptune : Dans l'*Annuaire* de 1851, sa longitude moyenne est rapportée exactement au 1er janvier 1850, tandis que pour les autres planètes principales l'époque commune est le 1er janvier 1800. Ce Tableau ayant été remanié en 1852, l'époque de Neptune, 1er *janvier* 1850, s'est trouvée remplacée par le mot *idem*, et par suite reculée de 50 ans; voilà la grave inexactitude que M. Le Verrier signale à l'Académie! Il s'agit, comme on le voit, d'une simple faute d'impression qui disparaîtra en remplaçant le mot IDEM par la date 1850. Chacun comprendra aisément que, malgré tous les soins qu'on apporte à la rédaction et à la correction d'un ouvrage de cette nature, il est presque impossible d'éviter quelques erreurs et même certaines inadvertances, regrettables surtout parce que la malveillance et la mauvaise foi s'empressent de les signaler, pour exploiter à leur profit la crédulité publique. La seule partie où l'erreur ait plus de peine à pénétrer est aussi la plus importante. C'est la partie des éphémérides, parce qu'on peut compter sur les nombreux moyens de vérification dont on dispose.

» Passons maintenant au reproche que M. Le Verrier adresse à la *Connaissance des Temps;* celui-là paraît plus sérieux. « La *Connaissance des Temps*, » dit M. Le Verrier, n'est plus d'aucune utilité aux astronomes. Une ré-

» forme profonde qui la relève de son infériorité vis-à-vis des éphémérides » étrangères, est urgente. » Déjà en 1856 M. Le Verrier avait imprimé dans le *Compte rendu* : « La *Connaissance des Temps* n'est plus depuis longtemps » un ouvrage scientifique. » Cette accusation était restée sans réponse de notre part, comme tant d'autres que M. Le Verrier ne se lasse pas de diriger contre nous. Nous pensions que le terrain était mal choisi pour une discussion dont la science n'est que le prétexte; mais puisque M. Le Verrier, qui appartient au Bureau des Longitudes, a cru devoir pour la seconde fois porter ses attaques devant l'Académie, au lieu de s'adresser directement au Bureau, il me sera permis de lui répondre en détail dans cette assemblée. Il faut que le monde savant apprenne ce que M. Le Verrier sait parfaitement : c'est que le Bureau des Longitudes a fait jusqu'à présent tout ce qu'il était possible de faire pour la *Connaissance des Temps*, avec les faibles ressources dont il pouvait disposer; car ce qu'on ne sait peut-être pas assez, c'est que les éphémérides de la *Connaissance des Temps* relatives au soleil, à la lune, aux distances lunaires, etc., et comprenant plus de 24 feuilles d'impression, sont calculées depuis nombre d'années avec l'aide de trois calculateurs seulement, surveillés par un membre du Bureau, tandis qu'on pourrait citer tel autre ouvrage de même genre qui exige le concours de plus de neuf calculateurs. Un autre membre du Bureau est chargé exclusivement du calcul des marées, des éclipses et des occultations d'étoiles par la lune. Depuis sept ans, c'est M. Mathieu qui dirige le travail des trois calculateurs pour les éphémérides proprement dites, et qui surveille la publication de l'ouvrage, publication qui entraîne un très-grand nombre de calculs particuliers et de longues vérifications. Les calculs des marées, des éclipses et des occultations d'étoiles par la lune sont confiés à M. Daussy, qui rédige en outre la Table des positions géographiques.

» Je le répète, le Bureau, avec des ressources aussi faibles, a toujours fait ce qu'il a pu pour améliorer son ouvrage. M. Le Verrier sait mieux que personne que, jusqu'à ces dernières années, le Bureau a toujours été arrêté par des difficultés d'argent. Ainsi, dès 1854, aussitôt après la nouvelle réorganisation du Bureau des Longitudes et de l'Observatoire, le Bureau a fait connaître au Ministre de l'Instruction publique toutes les améliorations dont la *Connaissance des Temps* lui paraissait susceptible. Si à cette époque il n'a rien obtenu, on ne peut pas, du moins, lui reprocher d'être resté indifférent, et insoucieux du progrès. A l'avénement du Ministre actuel, le Bureau a renouvelé ses instances : sur le Rapport détaillé d'une Commission prise dans son sein, il avait adopté en principe l'introduction,

dans la *Connaissance des Temps*, de nombreuses additions qui avaient pour objet de rendre cette Éphéméride encore plus utile aux astronomes et aux marins auxquels elle est particulièrement destinée, et de la mettre au niveau des ouvrages de ce genre qui se publient à l'étranger. Ce Rapport a été adressé au nouveau Ministre, et, plus heureux cette fois, le Bureau des Longitudes a été écouté. M. le Ministre de l'Instruction publique, comprenant bien la nécessité de venir en aide au Bureau pour assurer un service public important, a accordé en 1859 une somme de 8,000 francs. Alors on a pu donner dans la *Connaissance des Temps* les positions de la lune d'heure en heure au lieu de 12 heures en 12 heures. Le même crédit vient d'être accordé pour cette année, et nous pourrons introduire dans le prochain volume de 1863, outre les positions de la lune d'heure en heure, des additions utiles telles que les lieux des planètes pour tous les jours de l'année, etc., etc. Oui, sans doute, la *Connaissance des Temps* demandait d'urgentes réformes, mais il n'a pas dépendu de nous qu'elles ne fussent réalisées plus tôt, et nous n'avons pas attendu qu'on stimulât notre zèle. Aujourd'hui, grâce à la bienveillance éclairée de M. le Ministre de l'Instruction publique, le Bureau est donc rentré dans la voie des améliorations. M. Le Verrier connaît cette circonstance, et, sans être arrêté par le scandale qu'il va produire au dehors, il choisit précisément ce moment pour attaquer publiquement le Bureau des Longitudes dont il fait partie.

» J'ai eu le bonheur, dans ma jeunesse, de siéger au Bureau des Longitudes à côté des savants les plus considérables de notre temps : Lagrange, Laplace, Legendre, Lalande, Delambre, qui ont jeté sur le Bureau et sur l'Académie un si grand éclat au commencement de ce siècle. Ces hommes illustres réunissaient leurs efforts dans l'intérêt unique de la science. Jamais je n'ai rien vu de pareil à ce que je vois aujourd'hui. Je suis profondément affligé d'avoir eu à répondre devant l'Académie à des attaques insensées continuellement reproduites sous toutes les formes; mais j'ai dû obéir à un devoir impérieux, et rompre un silence que j'avais obstinément gardé jusqu'ici. »

« M. **Liouville** parle dans le même sens que *M. Mathieu.* »

« M. **Le Verrier**, répondant à *MM. Mathieu* et *Liouville*, fait remarquer :

» Qu'ayant inutilement réclamé depuis longtemps l'amélioration de la *Connaissance des Temps*, il s'est décidé à signaler à l'Académie l'insuffisance scientifique de cet ouvrage.

» M. Mathieu trouve que l'omission complète de Neptune importe peu et qu'en se bornant à cet exemple M. Le Verrier n'a pas justifié son opinion. Mais les cinquante-trois petites planètes trouvées depuis 1845 ne figurent point dans la *Connaissance des Temps;* les planètes Cérès, Pallas, Junon et Vesta ne s'y rencontrent pas davantage. S'il y est fait mention des anciennes planètes, leurs ascensions droites n'étant données qu'à la *minute de temps*, ne peuvent servir aux astronomes, puisque toute la science roule sur la discussion de quantités 60 fois plus petites, sur les secondes. En sorte qu'il est trop clair que la *Connaissance des Temps* ne fournit, sur aucune des planètes, aucun renseignement utile aux astronomes.

» M. Le Verrier déclare, en second lieu, que la question qu'il a soulevée est purement scientifique; que c'est par un travail scientifique qu'elle devrait être résolue, et qu'un accroissement de budget n'y fera rien. C'est ce qu'il exposera dans une brochure spéciale. En aucun cas, il ne saurait accepter que la *Connaissance des Temps à l'usage des Astronomes* devienne une simple éphéméride *nautique*.

» M. Liouville, de son côté, s'est surtout préoccupé de faire une diversion utile, en reprochant à M. Le Verrier quelques fautes qu'il croit avoir découvertes dans ses ouvrages imprimés. Aucune de ces fautes, insignifiantes d'ailleurs, n'a la moindre réalité; c'est M. Liouville qui, dans sa précipitation, a commis de grosses erreurs. Nous le prouverons clairement dans la prochaine séance. On ne doit pas espérer toutefois que nous nous abaissions à reprocher à M. Liouville tel *errata* qu'il a pu ajouter à ses ouvrages, sur nos indications. Nous demanderons à l'Académie la permission de passer sur ces personnalités, et de nous en tenir exclusivement à un calme examen de la question analytique.

» M. Le Verrier profite de la parole pour annoncer à l'Académie que M. le Ministre de l'Instruction publique et des Cultes, dont la libéralité envers les sciences est connue, a autorisé l'Observatoire impérial à envoyer une mission en Espagne pour l'observation de l'éclipse totale qui aura lieu le 18 juillet prochain. Son Excellence a désigné, pour conduire cette mission, notre confrère M. Faye, et par là Elle en a assuré le succès.

» Une publication spéciale du *Nautical Almanac anglais,* due à M. Hind, et dont nous déposons un exemplaire sur le bureau, sera pour les astronomes un guide précieux. Il nous sera permis de faire remarquer que dans cette publication on a fait usage des Tables du Soleil que nous avons récemment publiées et dont nous avons offert un exemplaire à l'Académie. »

ASTRONOMIE. — *Sur la figure des comètes et l'accélération de leurs mouvements; Note de* M. Faye *à l'occasion d'un article inséré par* M. Pape *dans les* Astronomische Nachrichten.

« J'ai publié depuis plus d'un an, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séances du 29 novembre, du 14 et du 27 décembre 1858, du 28 février, du 3 mai, du 14 novembre 1859), une série d'articles sur la figure des comètes, l'accélération de leurs mouvements et l'hypothèse d'un milieu résistant. Mon article du 9 janvier dernier est la suite de ces travaux non encore achevés, et j'ai eu soin de l'indiquer à plusieurs reprises, au début et dans le courant de cet article. Pour l'apprécier équitablement, il faudrait donc se donner la peine de parcourir ce qui précède. M. Pape ne s'est pas donné cette peine; il s'est borné à critiquer trois ou quatre appréciations de l'article du 9 janvier 1860, laissant tout le reste de côté. Je crois cependant devoir répondre à la critique de M. Pape, afin de prévenir autant qu'il est en moi l'impression défavorable qui pourrait en résulter pour mes travaux dans l'esprit des astronomes allemands. J'ose les recommander à leur bienveillance (1); peut-être y trouveront-ils, comme M. Encke lui-même, quelques idées dignes de leur attention; dans tous les cas, au lieu de l'esprit de dénigrement que M. Pape me suppose à l'égard d'Olbers, de Bessel et d'Encke, ils y trouveront bien certainement l'expression d'une admiration sincère et motivée pour leurs travaux, admiration qui n'a pas dû m'empêcher d'apprécier librement certaines hypothèses que ces savants n'ont jamais considérées eux-mêmes comme définitivement acquises à la science.

» Je rappellerai d'abord très-succinctement mes idées sur les comètes. Je pense que la figure des comètes et l'accélération de leurs mouvements (comète d'Encke) sont des phénomènes connexes qui se rapportent à une seule et même cause, à savoir l'action d'une force répulsive exercée par le soleil. Cette force dépendrait non pas de l'émission lumineuse de la surface solaire, comme le pensaient Kepler et Euler, comme je l'ai cru moi-même un instant, mais de sa haute température. Ce serait, dans les espaces célestes, la manifestation de la force répulsive qui régit autour de nous les phéno-

---

(1) Je profite de cette occasion pour réunir dans un seul errata, à la fin de ce *Compte rendu*, quelques fautes de rédaction ou d'impression qui se trouvent dans ces Mémoires, bien qu'elles ne puissent arrêter qu'un instant le lecteur. (*Voir* page 370.)

mènes purement physiques de la dilatation des corps, de l'élasticité des gaz, de l'état sphéroïdal des liquides placés sous l'influence d'une surface incandescente, de même que l'attraction newtonienne est la manifestation céleste de la force qui produit autour de nous les faits de la pesanteur. L'étude de cette force dans les phénomènes cométaires nous révélerait des traits caractéristiques qui nous échappent dans les faits du même ordre de la physique terrestre, où elle ne s'exerce qu'entre des molécules très-rapprochées. Par exemple je conclus de l'étude des comètes que cette force est proportionnelle aux surfaces et non aux masses comme la gravité; qu'elle est interceptée par un écran, tandis que la gravité agit à travers toute matière; qu'elle se propage avec une certaine vitesse finie, tandis que la gravité se propage instantanément. Il résulte de cette dernière particularité que, si l'on considère à un moment donné la répulsion et l'attraction exercées à la fois par le soleil sur un corps en mouvement, ces deux forces ne se confondront point : elles agiront suivant deux directions différentes, en sorte que la première pourra être décomposée suivant la tangente à l'orbite du mobile et suivant le rayon vecteur. Par la première de ces composantes, j'explique l'accélération de la comète d'Encke; par la deuxième, qui est beaucoup plus forte, j'explique la formation des queues.

» Permettez-moi d'insister ici sur un point qui se rapporte directement aux idées de Bessel et d'Olbers. La force répulsive ne rendrait pas compte de l'émission nucléale dirigée vers le soleil et négligée par Newton. Faut-il pour cela rejeter l'influence de la chaleur du soleil et recourir à la supposition de forces électriques? Je ne le pense pas. En se précipitant vers le soleil, une comète est soumise, dans ses diverses parties, à des attractions fort inégales; or, en recherchant analytiquement la figure d'équilibre vers laquelle tendent à chaque instant les couches successives de son atmosphère, M. Roche a trouvé que cette figure présentait des nappes coniques, ou plutôt asymptotes à des cônes de révolution, aussi bien vers le soleil que du côté opposé : j'en ai conclu que toute comète aurait deux queues si le soleil, en vertu de sa haute température, n'exerçait une répulsion sur ces deux émissions opposées, en même temps qu'il développe successivement, par sa chaleur, les couches concentriques qui constituent le noyau.

» Ainsi cette théorie ne met en action que des forces connues, l'attraction du soleil, celle que la comète exerce sur ses propres particules, la chaleur du soleil et la répulsion due à cette chaleur. Elle aurait l'avantage de rétablir dans le monde céleste la dualité de forces opposées qu'on observe partout dans le monde physique, avec cette restriction cependant

que le rôle de la répulsion astronomique, fort considérable à l'époque cosmologique où Laplace a cherché les origines du système solaire, serait aujourd'hui fort restreinte, à cause de la densité des planètes ; ses effets ne seraient plus guère perceptibles que sur la matière si légère des comètes.

» On comprend bien que je ne pouvais proposer cette explication sans discuter en même temps les hypothèses antérieures, et c'est ce que j'ai fait dans ma Note du 28 février 1859 que M. Pape n'a pas lue. Mais je devais surtout m'attacher à celle du milieu résistant, aussi ai-je repris plusieurs fois cette question. Mon dernier travail, celui dont M. Pape a critiqué non pas le fond, mais la forme, avait pour but de lever tous les doutes à ce sujet en montrant que le milieu résistant ne pouvant exister qu'à la condition de circuler autour du soleil suivant les lois de Kepler, ses couches successives ne sauraient exercer les unes sur les autres les pressions nécessaires à la théorie de Newton, et que son action n'était pas constamment résistante, comme le supposait M. Encke. Mais dans cette discussion des doctrines émises par de tels savants, j'ai eu soin de distinguer entre les résultats certains dont la science leur est redevable, et les pures conceptions hypothétiques qu'il est permis de discuter librement, de rejeter même de la manière la plus absolue.

» C'est ainsi qu'en parlant de Bessel, p. 423 du tome XLVIII, j'ai eu soin de dire : « La critique précédente ne saurait en rien porter atteinte à la » valeur du beau travail de Bessel, au point de vue de l'analyse et de la dis- » cussion profonde des observations. » En parlant de M. Encke, je n'ai pas manqué de faire remarquer que ma critique du milieu résistant ne tendait nullement à diminuer la gloire qui lui est acquise par la découverte capitale de l'accélération de sa comète. L'important, au point de vue de la théorie, était de rattacher cette accélération à une altération continue de la force tangentielle, et c'est là ce que M. Encke a fait, malgré la vive critique de Bessel lui-même qui en voulait faire une perturbation de la force radiale. Peu importe au fond, s'il s'agit d'évaluer le service rendu et de rendre justice à l'astronome allemand, que cette altération provienne de la résistance d'un milieu ou de toute autre cause : la science n'en aura pas moins été enrichie d'un fait considérable, admirablement calculé, discuté et apprécié par l'auteur.

» Pour justifier, si besoin était, aux yeux de M. Pape, la distinction que je viens de faire entre les hypothèses et les acquisitions de la science, je me servirais des propres paroles d'Olbers, rapportées dans une Notice que j'ai écrite sur sa vie et ses travaux presque aux débuts de ma carrière astronomique : « D'après l'hypothèse que j'ai formée sur les astéroïdes, hypo-

» thèse dont je ne fais pas d'autre usage que celui auquel devraient être » consacrées toutes les hypothèses, c'est-à-dire à nous inciter aux observa- » tions et à nous guider dans nos recherches... (1). »

» Bessel aussi a tenu ce langage. Il faut bien rappeler ces paroles à ceux qui s'étonnent que des hypothèses soient traitées avec moins de respect, moins de déférence que les découvertes réelles.

» Si M. Pape avait bien voulu lire mon article du 28 février, il aurait mieux compris, je pense, la véritable signification d'un passage qui lui a paru blessant pour Bessel. Ce passage ne s'applique, ai-je besoin de le répéter, ni aux observations, ni à l'analyse, ni aux calculs de l'illustre astronome de Kœnigsberg, mais seulement à son hypothèse. Exposer cette hypothèse, c'était à mon avis la réfuter, et c'est ce que j'ai fait en m'efforçant de reproduire fidèlement la pensée de Bessel (2). Par exemple, personne n'a admis jusqu'ici, du moins à ma connaissance, aucun physicien, aucun astronome n'admettra jamais, j'en suis convaincu, l'artifice dont il s'est servi pour faire rebrousser chemin à l'émission nucléale dirigée vers le soleil. A mes yeux la chaleur solaire est le nœud de l'énigme. Newton en avait senti l'importance, bien qu'il ne l'ait mise en jeu que d'une manière indirecte. Olbers et Bessel ont donc profondément altéré cette curieuse théorie en en bannissant l'élément principal, la chaleur solaire, pour le remplacer par des combinaisons arbitraires de forces électriques, exerçant leurs attractions ou leurs répulsions d'un astre à l'autre, à travers le vide des espaces célestes, ou par des forces polaires innommées, plusieurs fois supérieures à la gravitation, douées d'actions spécifiques tout à fait improbables et déterminant à la fois, dans le même corps, une émission générale et une émission locale de particules jouissant de polarités opposées.

» M. Pape ne me permettrait-il pas d'éprouver à l'égard des idées de Bessel les mêmes doutes que lui? Après avoir appliqué fort habilement à la comète de Donati les formules de Bessel, ne s'est-il pas vu forcé de conclure que l'émission nucléale devait posséder dans ses diverses parties des propriétés bien extraordinaires, et, frappé d'un tel résultat, n'a-t-il pas lui-même indiqué, comme seule issue à cette difficulté, l'hypothèse de Newton, celle d'un éther immobile, gravitant vers le soleil, mais non résistant, car Bessel n'admettait pas la résistance de l'éther? S'il veut bien examiner ma théorie, il verra peut-être avec satisfaction cette difficulté disparaître, et les

---

(1) *Biographie universelle*, t. LXXVI, p. 57.

(2) *Compte rendu* de la séance du 28 février 1859, p. 422 et 423.

propriétés spécifiques de ces molécules, si extraordinairement diverses quand il s'agit de forces polaires électriques ou magnétiques, se réduire à de simples différences de densité sans qu'on soit forcé de recourir à l'inadmissible éther de Newton.

» Je ne serai pas plus embarrassé du reproche qu'il m'adresse d'avoir voulu retrouver dans le livre des *Principes* de Newton le germe des meilleures idées d'Olbers, de Bessel, d'Encke, sur les comètes, et le fil conducteur de leurs plus importantes recherches analytiques sur ce sujet. Le livre des *Principes* contient ainsi le germe de bien d'autres découvertes, et rien n'est plus intéressant, les plus grands maîtres l'ont bien montré, que d'en faire l'étude à ce point de vue. On voit alors comment les idées naissent et se développent en partant de cette souche commune, et si l'on retire de cette lecture une plus grande admiration pour le génie de Newton, cette admiration n'ôte rien à celle que l'on doit à ses successeurs. Il me faudrait citer ici des pages entières pour montrer que Newton a su apprécier, comme on le fait à présent, la faible densité des queues, leurs changements de forme ou d'aspect, leur éclat, leur courbure, etc. Je me bornerai à quelques points principaux.

» Une des choses les plus difficiles à comprendre quand l'esprit se limite obstinément au cercle d'idées basées sur la seule gravitation, c'est assurément le développement et le mouvement des queues des comètes, et l'on ne s'étonne pas de l'hésitation d'un astronome illustre qui se demande si c'est bien réellement de la matière, dans le sens ordinaire de ce mot, qui est ainsi rejetée en arrière de la tête d'une comète avec une vélocité si extravagante, en dépit de la gravitation et des lois ordinaires du mouvement. Eh bien! qu'ai-je retrouvé dans le livre des *Principes?* L'idée que la matière des queues soumise à l'action d'une force répulsive centrale (qu'elle soit une force apparente et physiquement inadmissible sous la forme que lui donne Newton, peu importe ici) conserve la vitesse dont la comète était animée, en sorte que, sous cette double influence (la répulsion et la vitesse tangentielle), cette matière s'éloigne du Soleil en parcourant dans l'espace une certaine orbite, indépendamment de la matière émise le jour précédent ou le jour suivant; l'idée que la queue dans son ensemble n'est point entraînée (*brandished*) par la tête, mais qu'elle la suit en vertu des vitesses d'ailleurs assez différentes dont ses tranches successives étaient animées au moment de leur départ; l'idée que la forme de la queue dépend de ces vitesses, de l'intensité de la force répulsive et de la portion d'orbite parcourue par la tête pendant l'émission, de telle sorte qu'on peut assigner à l'aide d'une construction géométrique (ce serait une formule aujourd'hui)

la date à laquelle chaque tranche a dû être émise : tels sont à mon avis les germes déjà très-développés de ce qu'on rencontre de mieux dans les écrits modernes, les miens y compris. De là à donner l'équation approximative de la queue, comme l'a fait Brandes, et mieux encore Bessel, il n'y avait qu'un pas, et, pour un astronome tel que Bessel, ce pas ne pouvait être bien difficile à franchir. Enfin M. Pape veut-il une citation pour justifier le mot *textuel* qui se trouve dans la phrase incriminée? La voici : « La » comète qui parut l'année 1680 était à peine éloignée du soleil, dans son » périhélie, de la sixième partie du diamètre du soleil; et, à cause de l'extrême vitesse qu'elle avait alors et de la densité que peut avoir l'atmo- » sphère du soleil, elle dut éprouver quelque résistance; par conséquent » son mouvement dut être un peu retardé, elle dut s'approcher plus près » du soleil, et, en continuant d'en approcher toujours plus près à chaque » révolution, elle tombera à la fin sur le globe du soleil. » N'est-ce pas là, sauf un seul mot qu'il faudrait changer, l'idée dont M. Encke a tiré parti pour expliquer l'accélération de sa comète? Et pour avoir cité ce passage, qui a dû inspirer aussi Euler et bien d'autres, aurai-je exposé M. Encke au reproche de s'être paré d'un plumage d'emprunt? Personne ne l'admettra.

» Il me reste un dernier point à éclaircir. Suivant M. Pape, j'aurais eu le plus grand tort de m'être arrêté à Newton dans la recherche des origines de l'hypothèse du milieu résistant. Kepler a parlé aussi de l'éther, dit M. Pape. Je le savais; tout le monde sait que cette idée est vieille comme la métaphysique grecque : mais il s'agissait, dans mon article, d'un rôle mécanique attribué à ce milieu, et, en fait de mécanique, le grand Kepler lui-même est du monde ancien; à ce point de vue, le monde moderne commence un peu après lui, à Galilée sans doute, mais plutôt à Huyghens, à Newton. M. Pape va plus loin; il prétend que Newton n'a eu qu'à s'approprier des idées fort répandues de son temps : ici je l'arrêterai, et je prierai, lui qui s'est cru obligé, on a vu sur quels fondements, de prendre contre moi la défense d'Olbers et de Bessel, de me permettre de prendre à mon tour contre lui la défense de Newton. Le sujet ayant une certaine importance historique, je rapporterai les paroles de l'auteur en les traduisant.

« On peut se demander, dit M. Pape, si les idées de Newton que » M. Faye cite et prise si haut, lui appartiennent bien réellement, si ces » idées ne constituaient pas déjà à son époque quelque chose d'achevé » qu'il aura ensuite exposé à sa manière. Le contemporain déjà cité de » Newton, Robert Hooke, va nous permettre de décider sur ce point. A la

» page 163 de ses *Posthumous Works*, il s'exprime de la manière suivante :

» *Et il est arrivé ainsi que la plupart de ceux qui ont traité particulièrement » des comètes ont expliqué leurs queues non par des matières issues de la tête, » mais par un certain concours des rayons solaires qui traversent la tête et s'y » réfractent.... Mais, en examinant ce qui doit se passer ainsi, suivant eux, par » voie de réfraction et de réflexion, on reconnaît aisément que les résultats ne » sont nullement d'accord avec les phénomènes, et que cette explication ne sau- » rait satisfaire un investigateur sérieux.* »

» M. Pape ajoute :

« On ne peut méconnaître que cette explication, par réfraction ou ré- » flexion, contre laquelle Hooke vient de s'élever, n'ait la plus grande res- » semblance avec celle que Newton expose dans le passage déjà cité du » livre des *Principes* (1), si même on n'est en droit de dire que les deux théo- » ries sont identiques. Hooke, en effet, dit en propres termes : *Almost all » that have written... have explained... by refraction...* Ce devait donc être » à cette époque une idée très-répandue, idée qui plus tard aura fixé l'at-

---

(1) Voici ce passage : « Alius particulas tam leves quam graves dari posse existimat et ma- » teriam caudarum levitare, perque levitatem suam a sole ascendere. Cum autem gravitas » corporum terrestrium sit ut materia in corporibus, ideoque servata quantitate materiæ in- » tendi et remitti nequeat, suspicor ascensum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius » oriri. Ascendit fumus in camino impulsu aeris cui innatat. Aer ille per calorem rarefactus » ascendit, ob diminutam suam gravitatem specificam et fumum implicatum rapit secum. » Quidni cauda cometæ ad eundem modum ascenderit a sole? Nam radii solares non agitant » media quæ permeant nisi in reflexione et refractione. Particulæ reflectentes ea actione cale- » factæ calefacient auram æthercam cui implicantur. Illa calore sibi communicato rarefiet et ob » diminutam ea raritate gravitatem suam specificam qua prius tendebat in solem secum ra- » pient particulas reflectentes ex quibus cauda componitur. »

On voit d'où vient la méprise : dans ce passage que j'ai analysé moi-même avant d'exposer les idées d'Olbers et de Bessel (*Compte rendu* du 28 février 1859, p. 420), Newton emploie les mots de réflexion et de réfraction, mais dans un tout autre but que les écrivains condamnés par Hooke. Quant à Hooke lui-même, cet *alius* dont parle Newton m'a paru le désigner clairement. N'est-ce pas lui, en effet, qui, à propos des comètes de 1680 et 1682, a forgé le mot de *levitation* en l'opposant à celui de gravitation. M. Pape cite, il est vrai, ce passage fort curieux du même auteur : « It seems not incongruous to conclude that the phenomena of the » comet may be produced by a solid combustible ball actually fired, and by a gravitation of the » ambient æther towards the center of the sun. But I know it may be said that *omne simile » non est idem.* » M. Pape aurait donc été en droit de conclure que l'analogie indiquée dans ces quelques mots constitue un germe encore bien rudimentaire de la théorie si vigoureusement formulée et développée par Newton.

» tention, parce que Newton se l'est appropriée. Qu'elle appartienne réellement à Newton, c'est ce qui me paraît, d'après ce qui précède, plus que douteux. Que reste-t-il donc des appréciations de M. Faye? Pas même l'assertion que cette idée, qu'il confond d'ailleurs avec les vues d'Olbers et de Bessel, appartient à Newton! Je n'ai plus besoin d'ajouter un seul mot : là où les faits parlent si haut, toute explication serait superflue. »

» Pour moi, j'ai besoin d'un mot, mais je n'en demanderai pas davantage. L'idée que combat Hooke, ce n'est pas l'hypothèse de Newton, c'est celle de Cardan.

» Malgré cette critique dont on trouverait difficilement un autre exemple dans les *Astronomische Nachrichten*, j'ose croire que le savant astronome d'Altona me rendra mieux justice s'il veut bien me faire l'honneur de lire mes précédents écrits avec un peu de bienveillance, et aussi, qu'il me permette de le lui dire, avec plus d'attention que les œuvres posthumes du géomètre anglais. »

MÉMOIRES LUS.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *L'eau de la pluie qui mouille et lave les organes extérieurs des plantes est-elle absorbée directement? Recherches expérimentales sur cette question; par* **M. P. Duchartre.** (Extrait par l'auteur.)

(Commissaires, MM. Brongniart, Boussingault, Decaisne.)

« On a pensé de tout temps et tout le monde pense encore aujourd'hui que l'eau de la pluie qui mouille les parties extérieures des plantes, pendant un temps plus ou moins long, est absorbée par elles et vient ainsi concourir à la nutrition. Cependant c'est là une opinion admise en quelque sorte d'instinct et non appuyée sur des expériences directes; j'ai cru dès lors qu'il y avait intérêt à reconnaître expérimentalement si elle était l'expression exacte des faits. Les expériences que j'ai faites à ce sujet pendant ces quatre dernières années n'ont commencé à me donner des résultats précis et concluants que lorsque, après de longs et nombreux tâtonnements, je suis parvenu à disposer des plantes cultivées en pot et réunissant diverses conditions qui me semblaient essentielles, de telle de sorte que leur tige feuillée fût seule exposée à la pluie et que le pot où se trouvaient leurs racines fût entouré d'un appareil hermétiquement fermé, qui de plus ne présentait, sur toute sa surface extérieure, aucune substance susceptible de s'imbiber d'eau. Les résultats que j'ai obtenus ainsi me semblent assez

précis et en même temps assez nouveaux pour que je croie devoir les signaler dès ce jour, bien que je ne regarde pas mes recherches à ce sujet comme terminées, et que j'aie l'intention de les continuer cette année. Dans le nombre des observations que j'ai recueillies, j'en ai choisi huit que je rapporte en détail dans mon Mémoire, et qui ont eu pour sujets des pieds jeunes et vigoureux de *Fuchsia globosa*, de *Veronica Lindleyana*, ainsi qu'une Reine-marguerite et un *Phlox decussata*. Ces diverses plantes ont toutes également offert ce résultat remarquable que, après être restées exposées à la pluie pendant un temps plus ou moins long, même pendant dix-huit heures de suite, elles n'ont pas subi une augmentation de poids appréciable au moyen d'une balance qui accuse nettement $\frac{1}{20}$ de gramme; quelquefois même elles ont plutôt éprouvé, pendant le temps de l'expérience, une légère déperdition. Il semble logique de conclure de là que leurs parties extérieures, tige et rameaux herbacés, feuilles tant jeunes qu'adultes, se sont montrées ainsi dépourvues de la faculté d'absorber cette eau qui mouillait et lavait longuement leur surface. Il est évident que ce résultat des expériences est en complet désaccord avec les idées reçues. Dans mes observations la comparaison que j'ai établie avec des plantes semblables, pour lesquelles la terre elle-même recevait la pluie, a rendu frappant le contraste qui existe entre les organes extérieurs et les racines, quant aux conditions dans lesquelles les uns et les autres se trouvent relativement à cette eau et au parti qu'ils peuvent en tirer pour la végétation. »

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

L'Académie reçoit un Mémoire destiné au concours pour le grand prix de Sciences mathématiques de 1860, question concernant la *théorie des phénomènes capillaires* Ce Mémoire, qui est inscrit sous le n° 1, sera réservé pour la future Commission.

ORGANOGÉNIE. — *Mémoire sur la constitution et le développement des gouttières dans lesquelles naissent les dents des Mammifères; par* **M. Ch. Robin**.

(Commissaires, MM. Duméril, Serres, Geoffroy-Saint-Hilaire, J. Cloquet.

« L'apparition des follicules dentaires a lieu chez l'homme du cinquante-cinquième au soixantième jour après la conception pour la mâchoire inférieure, et du soixantième au soixante-cinquième pour la mâchoire supérieure. En outre, il est constant que les follicules ne naissent pas,

comme l'ont cru quelques auteurs, avant les parties constituantes des maxillaires; leur naissance représente au contraire le phénomène ultime de l'organisation primitive de la mâchoire, et ce n'est que lorsque l'ossification des maxillaires est notablement avancée que les follicules apparaissent.

» Les follicules dentaires naissent vers le milieu de la profondeur d'une gouttière osseuse, au sein du tissu sous-muqueux gingival, mou et gélatiniforme, qui la remplit, de même que les follicules pileux cutanés et les glandes sous-muqueuses naissent dans les tissus cellulaire sous-cutané et sous-muqueux. En fait, c'est dans ce qu'on nomme le canal dentaire inférieur lui-même d'une part, et dans le canal sous-orbitaire d'autre part, mais alors sous forme de gouttières, que naissent les follicules placés à leur niveau, car ce n'est que par suite du développement de l'os maxillaire que la gouttière se trouve divisée en canal dentaire et alvéoles, isolée et fermée transversalement au fond, de manière à constituer un conduit dont s'éloigne de plus en plus la couronne des dents et les alvéoles.

» Le tissu sous-muqueux contenu dans la gouttière diminue graduellement de quantité pendant que les follicules se développent; lorsque les racines des dents apparaissent, leur couronne s'éloigne peu à peu du fond de la gouttière; en même temps les cloisons osseuses provenant de l'épaississement de la face interne des parois de cette dernière, se forment entre les dents et leurs racines. De là une diminution graduelle de la quantité du tissu sous-muqueux qui s'atrophie devant cet envahissement osseux et l'accroissement des follicules. Il en reste toutefois une portion qui se soude avec la paroi de ces derniers pour former le périoste alvéolo-dentaire, car la gouttière n'a pas de périoste spécial autre que ce tissu sous-muqueux, et le canal dentaire une fois séparé des alvéoles ne contient que les vaisseaux et les nerfs sans être tapissé d'un périoste propre.

» *Développement des gouttières dentaires.* — Lorsque le cartilage mince qui représente le corps du maxillaire inférieur s'est rapidement ossifié à compter du trente-cinquième jour chez l'homme, on voit sur le bord supérieur de ce petit os s'élever peu à peu deux crêtes osseuses très-minces qui ne préexistaient pas à l'état cartilagineux. Elles donnent à l'organe un aspect bilamelleux, bien qu'il n'y ait eu primitivement qu'un seul point d'ossification. Elles limitent ainsi un sillon ou gouttière unique et continu chez l'homme et chez les Singes, mais chez les Mammifères qui ont une *barre*, celle-ci divise la gouttière en portion antérieure ou incisive, et portion postérieure ou molaire.

» Lorsque les cartilages encore minces qui représentent les maxillaires

supérieurs et l'intermaxillaire se sont ossifiés, à partir du quarante-cinquième jour chez l'homme, on voit sur les bords externe et antérieur de ces os se produire une mince crête externe et une autre parallèle interne, limitant un sillon qui bientôt prend la forme d'une gouttière. L'élévation graduelle de ces parois osseuses donne au bord de l'os une hauteur qu'il n'avait pas d'abord.

» Chez les Rongeurs et les Solipèdes on suit facilement la formation d'une gouttière incisive ou intermaxillaire et d'une autre pour les molaires, séparées par une *barre* ou partie pleine. Chez les Ruminants à cornes, on constate qu'il ne se produit pas de gouttière intermaxillaire et aussi qu'à aucune époque du développement il n'apparaît des follicules incisifs supérieurs.

» Dès l'origine des minces lèvres ou parois osseuses qui limitent les gouttières maxillaires supérieures et inférieures, on voit que le fond en est occupé par un petit filament formé par une artère, une veine et un nerf dont la nature est reconnaissable à l'aide du microscope, et qui plus tard deviendront les vaisseaux et nerf dentaires lors de l'apparition des follicules. Une fois la gouttière produite, elle offre les caractères suivants. Au niveau des molaires, et par rapport à l'axe du maxillaire inférieur, elle est située en dedans de celui-ci, mais elle le contourne pour se trouver reportée du côté de la face externe dans toute la portion qui renferme les follicules de la canine et des incisives. La gouttière est élargie, comme renflée en ampoule vers son tiers postérieur, étroite en avant et plus brusquement rétrécie en arrière; elle s'ouvre à la face interne de la branche montante de la mâchoire, par une ouverture en forme de fissure, élargie et arrondie au niveau du fond de la gouttière, mais étroite en haut où elle se ferme bientôt. Il ne reste alors que la partie inférieure de cet orifice qui forme le *trou dentaire postérieur*, que traversent les vaisseaux et les nerfs destinés aux dents. Ils occupent le fond de cette gouttière et y rampent dans un léger sillon lisse et régulier. La face interne des lames ou rebords du maxillaire qui limitent les côtés de la gouttière s'épaississent d'espace en espace, assez longtemps après la genèse des follicules et sous forme de petites saillies verticales placées en face l'une de l'autre de chaque côté. Ces épaississements s'avancent, se rejoignent et forment des cloisons complètes, divisant alors la gouttière en petites loges ou alvéoles; mais cela n'a lieu qu'à une époque bien plus avancée du développement, et chez l'homme jusqu'au neuvième mois de la grossesse on peut enlever d'une seule pièce le contenu de la gouttière, y compris tous les follicules. Lorsque les cloisons se sont produites, les vaisseaux et nerfs passent au-dessous d'elles, au fond de la gouttière, sans dis-

continuité, comme dans un canal, sous autant de ponts représentés par ces cloisons, et occupent bientôt un véritable conduit (dentaire inférieur) sous-alvéolaire.

» Ainsi se produisent à la fois les alvéoles d'une part et le conduit dentaire inférieur d'autre part, plusieurs semaines et même plusieurs mois après l'apparition des follicules, entre les canines et les incisives d'abord et plus tard entre les molaires. La couronne des dents née la première, qui reposait sur les vaisseaux et nerfs dentaires, ainsi que l'a décrit et figuré depuis longtemps M. Serres (1817), s'éloigne peu à peu des vaisseaux lorsque les racines se développent par suite de l'épaississement des cloisons vers leur profondeur. Elle se trouve alors très-distante du fond de la gouttière devenue canal dentaire et de ses vaisseaux tout près desquels le bulbe était né.

» La gouttière dentaire supérieure est constituée d'après un même type chez tous les Mammifères, à l'exception toutefois de sa portion incisive ou intermaxillaire. Les lames externe et interne qui la limitent sont minces, fragiles, à bord libre tranchant, un peu ondulé. La gouttière est comme légèrement variqueuse, parce que ces lames s'enfoncent un peu au niveau de l'intervalle des follicules dès l'apparition de ceux-ci. A ce niveau, chez l'homme vers le commencement du quatrième mois, et plus ou moins tard selon les espèces animales, on voit se former comme à la mâchoire inférieure les rudiments de cloisons alvéolaires, mais ils se produisent à la fois sur les côtés de la gouttière et non d'abord au fond seulement.

» Chez les fœtus de l'homme et des Singes (Ouistiti) et probablement aussi chez les Damans, cette gouttière se produit ainsi immédiatement au-dessous de l'œil. De même que pour le maxillaire inférieur, dont la gouttière est apparue avant celle de l'autre mâchoire, la gouttière du maxillaire supérieur est commune aux follicules qui vont y naître et aux vaisseaux qui restent sous-orbitaires. C'est le fond de cette gouttière qui, par suite des phases du développement, devient de très-bonne heure canal sous-orbitaire comme dans l'os opposé il devient plus tard canal dentaire inférieur, tandis que la portion la plus large forme les alvéoles après que les follicules y sont nés près des vaisseaux et nerfs sous-orbitaires.

» La gouttière dentaire est comme la portion du maxillaire supérieur qui la porte, non plus sous-orbitaire, mais anté-orbitaire chez les fœtus des Carnassiers, des Cheiroptères, des Ruminants, des Solipèdes et des porcs. Chez les Rongeurs et les Pachydermes, elle est au contraire en dedans de l'orbite qu'elle dépasse plus ou moins en avant. Chez les animaux, sa con-

formation générale est la même que chez l'homme et que chez les Singes; un faisceau vasculaire et nerveux, après avoir passé au-dessous ou en dedans du globe de l'œil, parcourt aussi le fond de la gouttière. Sa disposition est d'un groupe de Mammifères à l'autre des plus importantes à connaître, parce que se développant avant les dents, la distribution générale de celles-ci lui est subordonnée. Assez longtemps après la naissance des dents au sein du tissu mou qui le remplit, le fond de cette gouttière devient bientôt, comme chez l'homme et chez les Singes, un canal dentaire supérieur (*sus-maxillo-dentaire* des vétérinaires), tandis que sa partie évasée forme les alvéoles. On observe aussi que pendant la durée de ces phénomènes l'extrémité postérieure de la gouttière, et ses follicules qui étaient en avant de l'œil, se trouvaient peu à peu reportés en partie au-dessous de lui, tant par suite de l'allongement de la gouttière qu'en raison de la progression de l'orbite en avant pendant le développement de l'encéphale. Il y a chez les animaux adultes un ou deux alvéoles qui ne sont pas situés au niveau du canal dentaire supérieur ou de son prolongement antérieur, mais plus en arrière; ce sont les alvéoles des dernières molaires, dents développées longtemps après la naissance, alors que la gouttière s'est déjà divisée en canal et alvéoles, et qui ne sont jamais remplacées.

» Ainsi chez tous les animaux il y a un canal dentaire supérieur qui est l'analogue du canal dentaire inférieur, tant par ses usages que par son mode d'évolution. Seulement sa situation au-dessous de l'œil et loin des dents chez l'homme et chez les Singes a fait rapporter sa description et ses dénominations à celles de l'orbite, tandis que, comme la gouttière dentaire dont il provient, ses caractères sont subordonnés au mode de distribution et d'évolution des dents. Ce dernier fait entraîne des différences remarquables dans les maxillaires supérieurs, d'une espèce à l'autre, et d'un âge à l'autre dans chaque espèce. C'est ainsi que chez les chats, les lions, les chiens, les ours, on trouve, pour les vaisseaux et nerfs sus-maxillaires, un large et court canal, anté-orbitaire et non sous-orbitaire, criblé de petits trous inférieurement, qui se rendent au fond des alvéoles correspondants. Du bas de son orifice antérieur on voit partir le canal dentaire supérieur proprement dit, fond de la gouttière fœtale des dents qui correspond aux trois dernières molaires et à la canine, puis aux incisives. Chez les porcs et les tapirs on retrouve la même disposition fondamentale, sauf les différences de grandeur; mais l'orifice postérieur de ce canal, qui est tout anté-orbitaire, est placé bien au-dessous du plan inférieur de l'orbite. Ces dernières particularités existent aussi chez le che-

val et chez les Ruminants. L'orifice antérieur, dit sous-orbitaire, de ce canal est placé bien loin en avant de l'orbite, au niveau de la dernière molaire sur les Ruminants, de la deuxième ou de la troisième sur les Solipèdes; chez ces derniers, une branche de ce canal se continue au-dessus des premières molaires et jusqu'aux incisives. Leur sinus d'Hygmore se développe dans le maxillaire supérieur au-dessus du fond de la large gouttière dentaire et lorsque ce fond est devenu canal dentaire supérieur; il se trouve vers le milieu de ce sinus, loin de la lame externe de l'os. Chez les Rongeurs, le canal dentaire supérieur, qui, comme la gouttière dont il dérive, est placé sur un plan interne par rapport à l'orbite, est court et s'ouvre au niveau de la dernière molaire. »

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur le développement en série des coordonnées d'une planète et de la fonction perturbatrice; par* **M. Puiseux**.

« M. Bourget a fait remarquer dans les *Comptes rendus* du 6 février dernier que l'expression de l'équation du centre à laquelle je suis parvenu récemment avait été donnée par lui il y a plusieurs années (1). Je m'empresse de reconnaître l'exactitude de sa réclamation.

» M. Bourget rappelle en outre que la méthode de développement dont j'ai fait usage a été formulée par M. Cauchy dans un Mémoire inséré au t. XII des *Comptes rendus*, p. 85. Je ferai remarquer toutefois que l'illustre géomètre s'est occupé seulement du cas où l'anomalie moyenne est un angle réel et que je me suis proposé d'établir les conditions sous lesquelles subsiste le développement des coordonnées d'une planète quand l'anomalie moyenne reçoit des valeurs imaginaires. Le but principal de mon travail était d'ailleurs le développement de la fonction perturbatrice, et bien qu'on puisse trouver dans le Mémoire cité le germe de la méthode que j'ai suivie, je crois avoir fait faire un pas important à la question en assignant sous forme explicite le coefficient du terme général.

» J'ajoute à cette occasion qu'en faisant usage des fonctions b de la *Mécanique céleste* et de leurs dérivées, on peut éviter de développer suivant les puissances du rapport $\frac{a}{a'}$ le coefficient du terme général de la fonction perturbatrice, ainsi que je l'avais fait dans ma Note du 16 janvier dernier. Les nouvelles formules auxquelles on parvient ainsi seront l'objet d'une

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXXVIII, p. 807.

communication que j'aurai l'honneur de faire prochainement à l'Académie. »

En adressant cette nouvelle Note, M. Puiseux prie l'Académie de vouloir bien renvoyer à l'examen d'une Commission son Mémoire sur le développement en série des coordonnées des planètes et de la fonction perturbatrice, Mémoire dont des extraits ont été déjà imprimés dans les *Comptes rendus* des séances du 9 et du 16 février.

(Renvoi à l'examen de la Section de Géométrie.)

CORRESPONDANCE.

M. le Ministre de l'Agriculture, du Commerce et des Travaux publics adresse, pour la Bibliothèque de l'Institut, un exemplaire de la Carte géologique réduite du département du Nord.

Cette Carte, qui a été exécutée par *M. Meugy*, Ingénieur des Mines, est mise sous les yeux de l'Académie.

M. le Ministre adresse de même un exemplaire du Catalogue des Brevets d'invention pris en 1859.

M. Mathias Carvalho, professeur à l'Université de Coïmbre, transmet les remercîments de cette Institution, qui a été comprise dans le nombre de celles auxquelles l'Académie fait don de ses publications. « L'Université, ajoute M. Carvalho, a décidé, dans sa reconnaissance, que toutes ses publications seront de même offertes à l'Académie des Sciences. »

M. le Secrétaire perpétuel présente, au nom de *M. Eudes-Deslongchamps,* un opuscule sur le *Serresius galeatus,* Bonap., *et sur le squelette de cet oiseau.*

M. le Secrétaire perpétuel met également sous les yeux de l'Académie deux publications de *M. Eugène Eudes-Deslongchamps :* un Mémoire sur les Brachiopodes du kelloway-rock ou zone ferrugineuse du terrain callovien, et une Note sur ce terrain.

L'Académie reçoit les remercîments de trois des savants auxquels elle a décerné des prix dans sa dernière séance annuelle. Ce sont MM. Luther (prix d'Astronomie), Pasteur (prix de Physiologie expérimentale), et Cahours (prix du legs Jecker).

HELMINTHOLOGIE. — *Développement du* Tenia mediocanellata; *extrait d'une Lettre à* **M. de Quatrefages**.

« *M. Kuchenmeister* écrit de Dresde, en date du 1er février 1860, que le 20 janvier il a découvert le Cisticerque du *Tenia mediocanellata*. Ce Cysticerque habite le tissu cellulaire du porc au milieu des *C. cellulosa*. M. Kuchenmeister a fait avaler au mois de novembre 1859 des embryons de *Tenia mediocanellata* à un porc qui sera tué vers la fin de février. Il informera l'Académie des résultats de cette expérience. »

THÉORIE DES NOMBRES. — *Extrait d'une Lettre adressée à* M. Hermite *par* **M. Sylvester**.

« . . . . . En désignant par $(n; a, b)$ le nombre des solutions entières et positives de l'équation

$$ax + by = r$$

pour la série des valeurs $r = 0, 1, 2, \ldots, n$, j'ai obtenu ces deux théorèmes :

» 1°. Soit $n + 1 = kab + n'$, on aura

$$(n; a, b) = k\frac{kab + a + b + 2n' - 1}{2} + (n'; a, b).$$

Cette relation permet déjà de remplacer n par son résidu minimum suivant le module ab dans $(n; a, b)$.

» 2°. Soit ν un nombre entier inférieur à ab; on pourra déterminer les entiers positifs a' et b' de manière à avoir

$$ab' - ba' = 1,$$

a' étant moindre que a, et b' moindre que b. Cela posé, si l'on désigne par $\mathrm{E}(x)$ l'entier compris dans une quantité quelconque x, et qu'on pose

$$\mathrm{E}\left(\frac{b'\nu}{b}\right) = \nu',$$

on aura

$$(\nu; a, b) = (\nu'; a', b') - \mathfrak{N},$$

ou

$$\mathfrak{N} = \left[\nu' - \mathrm{E}\left(\frac{a'\nu}{a}\right)\right]\mathrm{E}\left(\frac{a\nu' - \nu a' + 1}{a'}\right).$$

Par ce second théorème on peut diminuer les deux coefficients a et b, en

les remplaçant par a' et b'; donc en le joignant au précédent et appliquant successivement les deux propositions, on voit qu'on pourra exprimer $(n; a, b)$ par une série contenant au plus autant de termes qu'il a de fonctions convergentes vers $\frac{a}{b}$. »

A 4 heures trois quarts, l'Académie se forme en comité secret.

La séance est levée à 5 heures trois quarts. E. D. B.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

L'Académie a reçu dans la séance du 6 février 1860 les ouvrages dont voici les titres :

Notices... *Comptes rendus des séances de l'Institution royale de la Grande-Bretagne;* partie 9, novembre 1858 - juillet 1859; in-8°.

Places... *Positions de 5,345 étoiles observées de* 1828 *à* 1854 *à l'observatoire d'Armagh; par* le Rév. T.-R. ROBINSON. Dublin, 1859; 1 vol. in-8°.

On chronic... *Sur l'intoxication alcoolique chronique; par* M. MARCET. Londres, 1860; in-18.

Amtlicher... *Compte rendu de la* 33ᵉ *réunion des naturalistes et médecins allemands, tenue à Bonn en septembre* 1857; *publié par les Commissaires de la réunion,* MM. J. NOEGGERATH et H.-F. KILIAN. Bonn, 1859; in-4°.

Nederlansch... *Archives néerlandaises de botanique, rédigées par* MM. DE VRIESE, SURINGAR et KNUTTEL. Vol. IV, 4ᵉ partie. Leyde, 1859; in-8°.

L'Académie a reçu dans la séance du 13 février 1860 les ouvrages dont voici les titres :

Note sur le Serresius galeatus, Bonap., *et sur le squelette de cet Oiseau; par* M. EUDES-DESLONGCHAMPS. Caen, 1859; br. in-4°.

Mémoires sur les Brachiopodes du kelloway-rock ou zone ferrugineuse du terrain callovien dans le nord-ouest de la France; par M. Eugène EUDES-DESLONGCHAMPS. Caen, 1859; br. in-4°.

Notes sur le terrain callovien; par le même. Paris, 1859; br in-8°.

Sur un grès rouge des Pyrénées et des Corbières; par M. A.-F. NOGUÈS; br. in-8°.

Deux Notes de M. P. DUCHARTRE : 1° *sur l'*Himantophyllum miniatum, Hook.; 2° *sur un hybride d'*Himantophyllum; br. in-8°.

Note sur le Pyrethrum Willemoti, *vulgairement nommé* Pyrèthre du Caucase; *par* le même; br. in-8°.

Quelques observations sur des raisins soufrés et brûlés au soleil; par le même; $\frac{1}{4}$ de feuille in-8°.

Manuel du Voilier de B. CONSOLIN, *maître voilier entretenu de la marine impériale et professeur du cours de voilerie à Brest, revu et publié par ordre de S. E. M. l'amiral Hamelin, Ministre de la Marine.* Paris, 1859; 1 vol. in-8°.

Traité des maladies charbonneuses; par L.-A. RAIMBERT. Paris, 1859; 1 vol. in-8°.

Études sur les Infusoires et les Rhizopodes; par Édouard CLAPARÈDE et Johannes LACHMANN; 1re et 2e livraisons. Genève, 1858 et 1859; in-4°.

De la formation et de la fécondation des œufs chez les vers nématoïdes; par Édouard CLAPARÈDE. Genève, 1859; in-4°.

Recherches sur les kystes muqueux du sinus maxillaire; par J.-A.-C. GIRALDÈS; 2e édition. Paris, 1860; br. in-4°.

Catalogue des brevets d'invention (année 1859), n° 9; br. in-8°.

Notice sur quelques publications récentes relatives aux comètes; par M. le professeur GAUTIER; br. in-8°.

Précis de l'histoire de l'astronomie aux États-Unis d'Amérique; par Ed. MAILLY. Bruxelles, 1860; in-18.

Calendrier rationnel. Réforme des divisions de l'année; par H. BARNOUT. Supplément. Paris, 1860; br. in-8°.

Carte géologique du département du Nord, abstraction faite du limon quaternaire; par R. MEUGY. 1858; grand aigle.

Total... *Eclipse totale du soleil du* 18 *juillet* 1860 : *marche de l'ombre sur le globe terrestre tracée d'après les Tables de la lune de Hansen et les Tables du soleil de Le Verrier.* (Extrait du *Nautical Almanach.*)

ERRATA.

(Séance du 6 février 1860).

Page 259, tableau, *au lieu de* $\theta = \frac{3}{2}$, *lisez* $\theta = \frac{3}{2}\alpha$.

Page 260, ligne 23, *après* seulement, *ajoutez* l'expression de.

Page 260, ligne 24, *au lieu de* restant la même, et, *lisez* est d'une autre forme, tandis que celle de.

Page 260, lignes 25 et 26, *au lieu de* étant un peu plus considérable..... *jusqu'à* moins grande, *lisez* reste la même.

Page 261, ligne 20, *au lieu de* $m + \mu$, *lisez* $mr + \mu$.

Page 263, *supprimez* cette page, et *voyez* la suite du Mémoire page 335.

Page 268, ligne 7 en remontant, *au lieu de* diminuer du Callao aux Galapagos, *lisez* diminuer des Galapagos au Callao.

TOME XLVII.

Page 847, ligne 12, *au lieu de* 0,031632, *lisez* $\frac{0,031632}{10^{10}}$.

Page 944, ligne 7, *au lieu de* réduit, *lisez* augmenté.

Même page, ligne 8, *au lieu de* $\frac{H}{10^6}$, *lisez* $H.10^6$.

Même page, lignes 19 et 20, *supprimez les mots :* très-petite quantité, diminuée, si l'on veut, de la très-petite.

Même page, ligne 21, *au lieu de* $\frac{Hv}{10^6}$ ou $\frac{316v}{10^{10}}$, *lisez* $Hv.10^6$ ou $\frac{316v}{10^8}$.

Page 1048, ligne 8, *au lieu de* $\frac{3Hne}{\sqrt{a(1-e^2)^3}}\sin(v-\varpi)$, *lisez* $\frac{6Hne}{\sqrt{a(1-e^2)^3}}\sin(v-\varpi)$.

TOME XLVIII.

Page 418, deuxième Note : Cette idée se trouve aussi dans l'*Exposition du Système du Monde* de Laplace.

TOME L.

Page 73, ligne 2 en remontant, *au lieu de* $\left(1-\frac{ds'}{dt}\right)$, *lisez* $\left(1-\frac{ds'}{ds}\right)$.

Page 74, ligne 3, *au lieu de* $\cos u$, *lisez* $\cos du$.

Page 75, ligne 17, *supprimez* le facteur $\sqrt{a}$.